Physique

Analyse dimensionnelle

Dimension d'une grandeur physique

La dimension d'une grandeur représente sa nature physique : une grandeur peut avoir la dimension d'une longueur, d'une surface, d'une énergie, d'une masse…
La notion de dimension est générale et ne suppose aucun choix particulier d'unité : une longueur peut s'exprimer en mètres, en pouces, en angströms, etc.

Le système international

Le système international est basé sur 7 grandeurs, auxquelles sont associées 7 unités de base.

Grandeur	Symbole dimensionnel	Unité	Symbole de l'unité
masse	M	kilogramme	kg
longueur	L	mètre	m
temps	T	seconde	s
intensité électrique	I	ampère	A
température	Θ	kelvin	K
intensité lumineuse	J	candela	cd
quantité de matière	N	mole	mol

- On dit « kelvin » en non pas « degré kelvin », et on note K et non pas °K.
- Si le nom de l'unité est tiré du nom d'une personne, ce nom ne prend pas de majuscule initiale, mais son symbole commence par une majuscule [1].
- Les grandeurs M, L et T permettent de décrire tout les grandeurs de la mécanique.
- Toutes les grandeurs de l'électricité et de l'électromagnétisme peuvent être décrites à partir des grandeurs M, L, T et I.

Équation aux dimensions

Sept grandeurs suffisent pour exprimer la dimension de toute grandeur physique ; le système international n'est qu'un choix parmi d'autres.
La dimension d'une grandeur G s'écrit $[G]$.

L'équation aux dimension d'une grandeur G s'écrit sous la forme générale

$$[G] = M^{a_1} L^{a_2} T^{a_3} I^{a_4} \Theta^{a_5} J^{a_6} N^{a_7}\,.$$

- Les dimensions correspondant aux grandeurs de base du système international sont notées sans crochets.
- Si $[a] = L$, on dit que a **a la dimension d'une longueur**, ou que a **est homogène à une longueur**.
- Si a est une longueur, on écrit $[a] = L$; si σ est une surface, on écrit $[\sigma] = L^2$; si v est une vitesse, on écrit $[v] = LT^{-1}$.

L'équation aux dimensions d'une grandeur G sans dimension se réduit à

$$[G] = 1$$

1. On utilise usuellement la notation « L » pour le litre, afin de ne pas confondre « l » avec le chiffre 1.

http://www.phylam.org — E. Saudrais

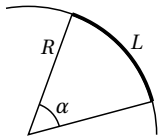
Les unités dérivées du système international

Les unités dérivées sont les unités du système international qui se déduisent des sept unités de base. On peut retrouver leur expression en fonction de unités de base à partir de relations connues mettant en jeu la grandeur cherchée.
Quelques exemples :

Grandeur	Unité	Relation utilisée	Expression en fonction des unités de base
Énergie	joule (J)	$E_c = \frac{1}{2}mv^2$	$1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-2}$
Force	newton (N)	$F = ma$	$1\,\mathrm{N} = 1\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$
Pression	pascal (Pa)	$F = PS$	$1\,\mathrm{Pa} = 1\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-2} = \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-2}$

Le radian, une unité sans dimension !

Soient deux rayons d'un cercle de rayon R, qui interceptent un arc de longueur L.
La mesure en radian de l'angle α entre ces deux rayons est définie par



$$\alpha = \frac{L}{R}$$

c'est-à-dire par le rapport de deux longueurs.

Un angle est une grandeur sans dimension : $[\alpha] = 1$.

Pratique de l'analyse dimensionnelle

On utilise les règles suivantes :

$$[G^a] = [G]^a \qquad [G_1 \times G_2] = [G_1] \times [G_2] \qquad [G'(X)] = \left[\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}X}\right] = \frac{[G]}{[X]}$$

- On en déduit $\left[\dfrac{\mathrm{d}^n G}{\mathrm{d}X^n}\right] = \dfrac{[G]}{[X]^n}$.

De plus :

L'argument des fonctions trigonométriques (sin, cos, tan), de la fonction exponentielle exp et des fonctions logarithmes (ln et log) doit être sans dimension.

La règle suivante permet de vérifier l'homogénéité d'expressions :

On ne peut ajouter que des grandeurs de même dimension.

On en déduit le résultat essentiel :

Une équation est homogène si ses deux membres ont la même dimension.

Cette règle permet :
– de prévoir la dimension d'une grandeur à l'aide de relations connues.
– de vérifier si une expression est homogène. En effet :

Une expression non homogène est nécessairement fausse.

- Une expression homogène n'est par contre pas forcément juste ! Cette vérification permet juste, parmi le vaste ensemble d'expressions fausses que vous êtes susceptibles d'établir, d'éliminer celles qui sont fausses car non homogènes…

Exercices d'application

Exercice 1 : déterminer une équation aux dimensions

Écrire l'équation aux dimensions des grandeurs suivantes ; en déduire leur unité dans le système international en fonction des unités de base.

1. Une masse volumique ρ.

2. L'intensité d'une force $F = \|\vec{F}\|$.

3. Une charge électrique Q.

4. Une énergie E.

5. Une résistance électrique R.

6. Une tension électrique U.

7. Une pulsation [2] ω

Exercice 2 : construire une grandeur ayant une dimension voulue

1. Construire une grandeur ayant la dimension d'un temps à l'aide d'une résistance R et d'une capacité C.

2. Même question avec une résistance R et une inductance L.

3. Déterminer l'équation aux dimensions de la raideur k d'un ressort ; construire alors une grandeur ayant la dimension d'un temps à l'aide d'une raideur k et d'une masse m.

Exercice 3 : introduire des grandeurs caractéristiques

1. Dans un circuit, l'intensité circulant dans une branche obéit à l'équation différentielle

$$\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{i(t)}{C} = 0$$

où R_1 et R_2 sont des résistances et C une capacité.
À l'aide des ces grandeurs, définir une grandeur τ homogène à un temps (temps caractéristique de l'évolution de ce système).

2. Une grandeur physique $y(t)$ (tension dans un circuit, élongation d'un ressort...) obéit à une équation différentielle de la forme

$$\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 y(t) = 0\,.$$

Déterminer les dimensions des grandeurs ω_0 et Q.

3. Même question si l'on écrit l'équation différentielle sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2} + 2\lambda\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 y(t) = 0\,.$$

Exercice 4 : vérifier l'homogénéité d'expressions

Vérifier l'homogénéité des résultats suivants :

1. On donne l'évolution d'une tension : $u(t) = u_0\,\mathrm{e}^{-RCt}$.

2. On donne l'énergie potentielle élastique d'un ressort : $E_\mathrm{p}(x) = \frac{1}{2}kx$.

3. On donne une tension électrique : $u_2(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2}u(t)$.

2. pulsation temporelle, par exemple $u(t) = u_0\cos(\omega t)$.

http://www.phylam.org — E. Saudrais

Solutions des exercices

Exercice 1

1. Une masse volumique est le rapport d'une masse sur un volume : $\rho = \frac{m}{V}$, d'où

$$\boxed{[\rho] = ML^{-3}}\,.$$

Une masse volumique s'exprime en $\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$.

2. On utilise le principe de la dynamique :

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

où $\vec{a}$ est une accélération. L'équation aux dimensions correspondante est

$$[F] = M[a]\,.$$

Comme $[a] = LT^{-2}$, on en déduit $\boxed{[F] = MLT^{-2}}$. L'intensité d'une force s'exprimant en newton, on a $1\,\mathrm{N} = 1\,\mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-2}}$.

3. On utilise la relation entre intensité électrique et charge électrique :

$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\,.$$

L'équation aux dimensions correspondante est

$$[I] = \frac{[Q]}{T}\,,$$

d'où $\boxed{[Q] = IT}$. Une charge s'exprimant en coulomb, on a $1\,\mathrm{C} = 1\,\mathrm{A\cdot s}$.

4. On peut utiliser l'expression de l'énergie cinétique [3] :

$$E = \frac{1}{2}mv^2\,,$$

d'où $\boxed{[E] = [m]\cdot[v]^2 = ML^2T^{-2}}$. Une énergie s'exprimant en joule, on a $1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{kg\cdot m^2\cdot s^{-2}}$.

5. On peut utiliser l'expression de la puissance dissipée par effet Joule : $P = RI^2$, donc $[P] = [R]I^2$. Il reste à déterminer l'équation aux dimensions d'une puissance : c'est le rapport d'une énergie sur un temps : $[P] = [E]T^{-1}$; d'après le résultat de la question précédente, on a donc $[P] = ML^2T^{-3}$. On en déduit $\boxed{[R] = ML^2T^{-3}I^{-2}}$. Une résistance s'exprimant en ohm, on a $1\,\Omega = 1\,\mathrm{kg\cdot m^2\cdot s^{-3}\cdot A^{-2}}$.

6. On peut utiliser l'expression de la puissance reçue par un dipôle : $P = UI$, d'où $[U] = [P]I^{-1}$. On a établi précédemment que $[P] = ML^2T^{-3}$ donc $\boxed{[U] = ML^2T^{-3}I^{-1}}$. Une tension s'exprimant en volt, on a $1\,\mathrm{V} = 1\,\mathrm{kg\cdot m^2\cdot s^{-3}\cdot A^{-1}}$.

7. Une pulsation est une vitesse angulaire :

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\,.$$

Elle s'exprime en $\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$. Un angle étant une grandeur sans dimension, on a $\boxed{[\omega] = T^{-1}}$.
Une pulsation a la dimension d'une fréquence.

Exercice 2

1. La loi d'Ohm $U = RI$ s'écrit dimensionnellement

$$[U] = [R]\times I \qquad (1)$$

La relation entre le courant et la tension aux bornes d'un condensateur s'écrit $I = C\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}$ soit dimensionnellement

$$I = [C]\frac{[U]}{T} \qquad (2)$$

D'après les équations (1) et (2) on a

$$\frac{[U]}{I} = [R] = \frac{T}{[C]}$$

d'où $\boxed{[RC] = T}$.

$\boxed{\text{Le produit } \tau = RC \text{ a la dimension d'un temps.}}$

➤ Ce résultat est à retenir.

2. La relation entre le courant et la tension aux bornes d'une bobine s'écrit

$$U = L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

soit dimensionnellement

$$[U] = [L]\frac{I}{T} \qquad (3)$$

D'après les équations (1) et (3) on a

$$\frac{[U]}{I} = [R] = \frac{[L]}{T}$$

d'où $\frac{[L]}{[R]} = T$.

Le rapport $\boxed{\tau = L/R}$ a la dimension d'un temps.

3. On peut aussi utiliser l'expression du travail d'une force $W = FL$ qui a la dimension d'une énergie, et $[E] = [F]L$.

http://www.phylam.org — E. Saudrais

3. La force de tension d'un ressort est de la forme $\vec{F} = -k\overrightarrow{OM}$. On en déduit l'équation aux dimensions $[F] = [k]L$.

D'après le principe fondamental de la dynamique, $F = ma$ soit $[F] = MLT^{-2}$. On a donc $MLT^{-2} = [k]L$, d'où $\boxed{[k] = MT^{-2}}$. Si m est une masse, on a donc

$$\left[\frac{m}{k}\right] = T^2.$$

La grandeur $\boxed{\tau = \sqrt{\frac{m}{k}}}$ a la dimension d'un temps.

Exercice 3

1. L'équation proposée s'écrit

$$\frac{R_1R_2C}{R_1+R_2}\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + i(t) = 0.$$

Les deux termes ayant nécessairement la même dimension, l'équation aux dimensions correspondante s'écrit

$$\left[\frac{R_1R_2C}{R_1+R_2}\right] \times \left[\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}\right] = I$$

soit

$$\left[\frac{R_1R_2C}{R_1+R_2}\right] \times \frac{I}{T} = I$$

On a donc

$$\left[\frac{R_1R_2C}{R_1+R_2}\right] = T.$$

L'expression a la dimension d'un temps ; nous pouvons poser

$$\boxed{\tau = \frac{R_1R_2C}{R_1+R_2}}.$$

L'équation différentielle s'écrit alors sous la forme dite canonique

$$\tau\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + i(t) = 0$$

caractéristique d'un système du premier ordre.

2. On sait que

$$\left[\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\right] = \frac{[y]}{T} \quad \text{et} \quad \left[\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2}\right] = \frac{[y]}{T^2}.$$

Chaque terme de l'équation différentielle a donc pour dimension $[y]/T^2 = [y]T^{-2}$.

L'équation aux dimensions relative au dernier terme s'écrit donc

$$\frac{[y]}{T^2} = \left[\omega_0^2\right] \times [y] = [\omega_0]^2[y]$$

d'où $\boxed{[\omega_0] = T^{-1}}$: le terme ω_0 a la dimension de l'inverse d'un temps, c'est-à-dire d'une pulsation[4].

L'équation aux dimensions relative au second terme s'écrit donc

$$\frac{[y]}{T^2} = \frac{[\omega_0]}{[Q]} \times \frac{[y]}{T} = \frac{1}{[Q]}\frac{[y]}{T^2}.$$

On a donc $\boxed{[Q] = 1}$: le terme Q est sans dimension.

3. Le dernier terme de l'équation différentielle est inchangé, on a donc $[\omega_0] = T^{-1}$, homogène à une pulsation.

L'équation aux dimensions relative au second terme s'écrit donc

$$\frac{[y]}{T^2} = [\lambda] \times \frac{[y]}{T} = [\lambda]\frac{[y]}{T}.$$

On a donc $\boxed{[\lambda] = T^{-1}}$: le terme λ a la dimension de l'inverse d'un temps[5].

Exercice 4

1. On sait que $[RC] = T$, donc $[RCt] = T^2$. Or l'argument d'une exponentielle doit être sans dimension, ce qui n'est pas le cas.

L'expression n'est pas homogène.

2. La force élastique d'un ressort est de la forme $\vec{F} = -k\overrightarrow{OM}$, soit scalairement $F = -kx$. Une énergie (potentielle) a la dimension d'un travail, c'est-à-dire du produit d'une force par une longueur. **L'expression n'est pas homogène.**

3. Le rapport de deux résistances est sans dimension. On a donc

$$[u_2] = \left[\frac{R_2}{R_1+R_2}\right][u] = [u] \quad \text{car} \quad \left[\frac{R_2}{R_1+R_2}\right] = 1.$$

Les deux membres ont la dimension d'une tension. **L'expression est homogène.**

4. Ou d'une fréquence, mais la résolution de l'équation différentielle fait intervenir ce terme comme une pulsation.

5. On pourrait dire aussi d'une pulsation ou d'une fréquence ; c'est la résolution de l'équation caractéristique qui permet d'établir que λ joue le rôle d'un temps caractéristique de l'évolution du système.

http://www.phylam.org — E. Saudrais