Mathématiques et physique

I — Rappels fondamentaux

1. Systèmes de coordonnées

Il est d'usage de repérer un point dans l'espace à l'aide d'une **base orthonormée directe**, constitués de trois vecteur $(\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k)$ unitaires ($\|\vec{e}_i\| = 1$) et orthogonaux [1].
L'espace est conventionnellement orienté dans le sens direct. On retiendra la convention usuelle à l'aide de l'image d'un tire-bouchon : la base $(\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k)$ est directe si en tournant $\vec{e}_i$ vers $\vec{e}_j$, le tire-bouchon s'enfonce dans la direction de $\vec{e}_k$.

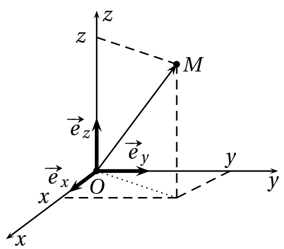
Coordonnées cartésiennes

Un point est repéré par ses trois coordonnées x, y et z : $M(x, y, z)$.
Le vecteur position s'écrit $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$.
Le vecteur déplacement élémentaire $d\vec{l} = \overrightarrow{MM'}$, avec $M'(x+dx, y+dy, z+dz)$, s'écrit

$$d\vec{l} = dx\,\vec{e}_x + dy\,\vec{e}_y + dz\,\vec{e}_z.$$

Le volume élémentaire s'écrit

$$d\tau = dx dy dz.$$



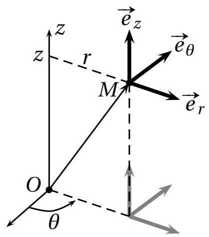
Coordonnées cylindriques

Un point est repéré par ses trois coordonnées r, θ et z : $M(r, \theta, z)$.
Le vecteur position s'écrit $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$.
Le vecteur déplacement élémentaire $d\vec{l} = \overrightarrow{MM'}$, avec $M'(r+dr, \theta+d\theta, z+dz)$, s'écrit

$$d\vec{l} = dr\,\vec{e}_r + r d\theta\,\vec{e}_\theta + dz\,\vec{e}_z.$$

Le volume élémentaire s'écrit

$$d\tau = r dr d\theta dz.$$



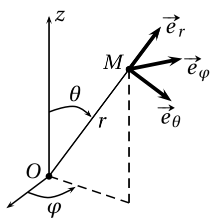
Coordonnées sphériques

Un point est repéré par ses trois coordonnées r, θ et φ : $M(r, \theta, \varphi)$.
Le vecteur position s'écrit $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$.
Le vecteur déplacement élémentaire $d\vec{l} = \overrightarrow{MM'}$, avec $M'(r+dr, \theta+d\theta, \phi+d\phi)$, s'écrit

$$d\vec{l} = dr\,\vec{e}_r + r d\theta\,\vec{e}_\theta + r\sin\theta d\varphi\,\vec{e}_\varphi.$$

Le volume élémentaire s'écrit

$$d\tau = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi.$$



1. Ces deux propriétés peuvent se résumer en $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$ à l'aide du symbole de Kronecker.

2. Pratique du calcul intégral

Le principe du calcul intégral est de considérer constante une fonction $f(x)$ pour un accroissement élémentaire dx de la variable x.

- ➤ Pour une fonction $f(x, y, z)$ de plusieurs variables, on considère de même que cette fonction reste constante pour un accroissement élémentaire dx de la variable x, les autres variables étant maintenues constantes.

Exemple : calcul de la charge d'une distribution. On considère une distribution de densité volumique de charges $\rho(x, y, z)$ en coordonnées cartésiennes.
Sur le volume élémentaire $d\tau = dx dy dz$, on peut considérer $\rho(x, y, z)$ constante, ce qui permet d'écrire charge = densité × volume, soit $\delta Q = \rho(x, y, z) d\tau$. La charge totale s'écrit alors

$$Q = \iiint_{M\in\mathcal{D}} \rho(x, y, z) dx dy dz.$$

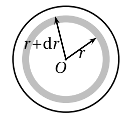
- ➤ Le raisonnement « la fonction est constante pour un accroissement élémentaire des variables » semble approché, mais l'intégrale est définie comme un passage à la limite, qui conduit à un résultat exact.
- ➤ Le plus souvent, on étudie des systèmes possédant certaines invariances, ce qui permet de se ramener à une intégrale simple en choisissant un domaine élémentaire « plus grand ». Il s'agit alors de trouver le domaine élémentaire le plus grand possible tel que la grandeur considérée puisse être considérée comme constante.

Il faut connaître les éléments de surface et de volume suivants :

En coordonnées polaires

Surface d'un anneau de rayon r, de largeur dr :

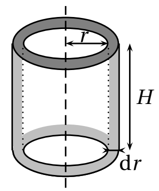
$$dS = 2\pi r dr.$$



En coordonnées cylindriques

Volume d'un tube de hauteur H, de rayon r et d'épaisseur dr :

$$d\tau = 2\pi r H dr.$$



En coordonnées sphériques

Volume d'une coquille sphérique de rayon r, d'épaisseur dr :

$$4\pi r^2 dr.$$