Mathématiques et physique

III — Équations différentielles

On rappelle la solution générale et les propriétés fondamentales des **équations différentielles linéaires homogènes** de base.
Les équations différentielles homogènes décrivent le **régime libre** d'un système.

Système du premier ordre

Équation différentielle	Solution générale
$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + a\,y(x) = 0$	$y(x) = A\,\mathrm{e}^{-ax}$

- La constante a a la même dimension que $1/x$.
- La constante A est déterminée par une condition aux limites : $y(x) = y(0)\,\mathrm{e}^{-ax}$ et plus généralement $y(x) = y(x_0)\,\mathrm{e}^{-a(x-x_0)}$.

Dans le cas d'une fonction du temps $y(t)$, on pose $\tau = 1/a$, où $\tau > 0$ est le **temps caractéristique** :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{y(t)}{\tau} = 0}\,.$$

Quelle que soit la condition initiale, on a

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0}\,.$$

Système du second ordre

<table>
<tr><th>Équation différentielle</th><th>Solution générale</th></tr>
<tr><td rowspan="4">$a\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + b\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + c\,y(x) = 0$</td><td>Les solutions dépendent de la nature des solutions de l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$, donc du signe de $\Delta = b^2 - 4ac$. On distingue trois types de solutions.</td></tr>
<tr><td>$\Delta > 0$: deux racines réelles r_1 et r_2
$y(x) = A\,\mathrm{e}^{r_1 x} + B\,\mathrm{e}^{r_2 x}$</td></tr>
<tr><td>$\Delta = 0$: une racine réelle double r_0
$y(x) = (A + Bx)\,\mathrm{e}^{r_0 x}$</td></tr>
<tr><td>$\Delta < 0$: deux racines imaginaires conjuguées $r_1 = u + \mathrm{i}v$ et $r_2 = u - \mathrm{i}v$
$y(x) = \mathrm{e}^{ux}[A\cos(vx) + B\sin(vx)]$</td></tr>
</table>

- Les deux constantes A et B sont déterminées par deux conditions initiales.

Formes canoniques en physique

Il existe plusieurs formes canoniques de l'équation différentielle linéaire du second ordre en physique.
On considère une fonction du temps $y(t)$.

Forme canonique	Grandeurs caractéristiques
$\boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 y(t) = 0}$	pulsation propre : ω_0 facteur de qualité : Q sans dimension
$\boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + 2\sigma\omega_0\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 y(t) = 0}$	pulsation propre : ω_0 facteur d'amortissement : σ sans dimension
$\boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + 2\lambda\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 y(t) = 0}$	pulsation propre : ω_0 coefficient d'amortissement : λ avec $[\lambda] = T^{-1}$

Trois types de régimes sont possibles, correspondant respectivement aux cas $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ et $\Delta < 0$ de l'équation caractéristique :

Nature du régime	Forme de la solution	Condition
Apériodique	$y(t) = A\,\mathrm{e}^{-(\lambda+\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2})\,t} + B\,\mathrm{e}^{-(\lambda-\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2})\,t}$	$\lambda > \omega_0$, ou $Q < 1/2$, ou $\sigma > 1$
Critique	$y(t) = (A + Bt)\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$	$\lambda = \omega_0$, ou $Q = 1/2$, ou $\sigma = 1$
Pseudo-périodique	$y(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}\,[A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)]$	$\lambda < \omega_0$, ou $Q > 1/2$, ou $\sigma < 1$

Quel que soit le type de régime et quelles que soient les conditions initiales, on a

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0.$$

Complément sur le régime pseudo-périodique

La pseudo-pulsation est $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} = \omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - \omega_0\sigma}$.
La pseudo-période, période des termes sinusoïdaux, est $T = 2\pi/\Omega$.
Le système est dit faiblement amorti si $Q \gg 1$ (ou $\sigma \ll 1$). On a alors $\Omega \approx \omega_0$.

Cas particulier fondamental

<table>
<tr><th>Équation différentielle</th><th>Solution générale</th><th>Condition</th></tr>
<tr><td rowspan="3">$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + a\,y(x) = 0,\ \ a \in \mathbf{R}$</td><td>$y(t) = A\cos(kx) + B\sin(kx)$</td><td>$a = k^2 > 0$</td></tr>
<tr><td>$y(t) = Ax + B$</td><td>$a = 0$</td></tr>
<tr><td>$y(t) = A\,\mathrm{e}^{kx} + B\,\mathrm{e}^{-kx}$</td><td>$a = -k^2 < 0$</td></tr>
</table>

- La cas $a = k^2 > 0$ est le seul dont la solution (ou sa dérivée) peut s'annuler en deux points distincts.

Le premier cas est celui de l'**oscillateur harmonique** :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + k^2 y(x) = 0}\,.$$

La solution générale peut s'écrire

$$y(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx) \quad \text{ou} \quad y(x) = A'\cos(kx+\varphi) = B'\sin(kx+\psi)\,.$$

- La première forme permet en général de déterminer facilement les constantes. En particulier, en fonction des symétries du système, si $y(x)$ est paire on a $B=0$, et si $y(x)$ est impaire on a $A=0$.

Le troisième cas correspond à

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} - k^2 y(x) = 0}\,.$$

La solution générale peut s'écrire

$$y(x) = A\,\mathrm{e}^{kx} + B\,\mathrm{e}^{-kx} \quad \text{ou} \quad y(x) = A'\cosh(kx) + B'\sinh(kx)\,.$$

- La première forme est plus simple si l'on doit envisager $x \to +\infty$ ($A=0$) ou $x \to -\infty$ ($B=0$).
  La seconde forme est plus simple si $y(x)$ est paire ($B'=0$) ou impaire ($A'=0$).

Extension en complexes

Équation différentielle	Solution générale
$\dfrac{\mathrm{d}^2 \underline{y}}{\mathrm{d}x^2} + \underline{a}\,\underline{y}(x) = 0,\;\; a \in \mathbf{C}$	$\underline{y}(t) = \underline{A}\,\mathrm{e}^{\underline{\lambda} x} + \underline{B}\,\mathrm{e}^{-\underline{\lambda} x}$ avec $\underline{\lambda}^2 = \underline{a}$

- Cas particulier où $\underline{a}$ est imaginaire pur : $\underline{a} = \mathrm{i}b$, avec $b \in \mathbf{R}$. On a alors $\lambda = (1+\mathrm{i})\sqrt{\dfrac{b}{2}}$.

  Ce cas est rencontré dans l'étude de l'effet de peau.