Physique des ondes

II — Ondes sonores dans les fluides

Onde sonore

Une onde sonore — ou onde acoustique — est une onde **longitudinale** de pression, se propageant dans un milieu matériel.

- Une onde sonore ne peut se propager dans le vide.
- Une onde sonore peut être décrite comme une onde de déplacement. Les mouvements des particules ont une très faible amplitude (micrométrique).
- Le milieu de propagation peut être solide ou fluide.

Approximation acoustique

On utilise le formalisme eulérien :

champ eulérien	pression	vitesse	masse volumique
en l'absence d'onde	P_0	$\vec{0}$	μ_0
en présence d'onde	$P(M,t) = P_0 + p_1(M,t)$	$\vec{v}(M,t) = \vec{v}_1(M,t)$	$\mu(M,t) = \mu_0 + \mu_1(M,t)$

- Le champ $p_1(M,t)$, algébrique, est appelé **surpression**, ou **pression acoustique**.
- Le champ $\mu_1(M,t)$ est algébrique.

L'approximation acoustique portent sur les champs caractérisant l'onde acoustique, portant l'indice 1 :

- ce sont des infiniment petits du même ordre, ainsi que leurs dérivées spatiale et temporelle ;
- leur moyenne temporelle est nulle : $\langle p_1(M,t)\rangle = 0$; $\langle \mu_1(M,t)\rangle = 0$ et $\langle \vec{v}_1(M,t)\rangle = \vec{0}$.

Le fluide est supposé idéal, subissant une évolution adiabatique réversible, et la pesanteur est négligée.

Équations de l'acoustique linéaire

Les expressions sont linéarisées, en se restreignant au premier ordre vis-à-vis des grandeurs d'indice 1 et de leurs dérivées.

Les champs eulériens de vitesse $\vec{v}_1$, de surpression p_1 et de variation de masse volumique μ_1 vérifient, dans le cadre de l'approximation acoustique, les équations linéaires suivantes :

Équation d'Euler $$\mu_0 \frac{\partial \vec{v}_1(M,t)}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, p_1(M,t)$$

Conservation de la masse $$\frac{\partial \mu_1(M,t)}{\partial t} + \mu_0 \,\text{div}\, \vec{v}_1(M,t) = 0$$

Adiabaticité $$\mu_1(M,t) = \mu_0 \chi_S p_1(M,t)$$

- L'écoulement associé à une onde acoustique est compressible : $\text{div}\, \vec{v}_1 \neq 0$.
- L'écoulement associé à une onde acoustique est irrotationnel : $\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{v}_1 = \vec{0}$.
- Le coefficient de compressibilité adiabatique du fluide est défini par :

$$\boxed{\chi_S = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial \mu}{\partial P}\right)_S}$$

Équation d'onde

La surpression vérifie l'équation de d'Alembert

$$\frac{\partial^2 p_1(M,t)}{\partial t^2} - c^2 \Delta p_1(M,t) = 0 \qquad \text{avec} \qquad c^2 = \frac{1}{\mu_0 \chi_S}$$

- La célérité c ne dépend que des caractéristiques du milieu de propagation ; elle ne dépend pas de l'onde.
- Les champs $\vec{v}_1(M,t)$ et $\mu_1(M,t)$ vérifient la même équation de d'Alembert.
- L'évolution du fluide étant adiabatique réversible, la loi de Laplace permet d'établir l'expression de la célérité des ondes sonores dans un gaz parfait de masse molaire M :

$$\boxed{c = \sqrt{\frac{\gamma R T_0}{M}}}$$

Ondes planes progressives harmoniques (OPPH)

Notation complexe

La linéarité des équations permet d'utiliser la notation complexe.
À la surpression $p_1(M,t) = p_{10}\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi)$ on associe la grandeur complexe

$$\underline{p}_1(M,t) = \underline{p}_{10}\, e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})} \qquad \text{avec} \qquad \underline{p}_{10} = p_{10}\, e^{i\varphi}\,.$$

On en déduit les équations complexes de l'acoustique linéaire :

Équation d'Euler $\mu_0 \omega \underline{\vec{v}}_1(M,t) = \underline{p}_1(M,t)\,\vec{k}$

Conservation de la masse $\omega \underline{\mu}_1(M,t) = \mu_0\, \vec{k}\cdot\underline{\vec{v}}_1(M,t)$

Adiabaticité $\underline{\mu}_1(M,t) = \mu_0 \chi_S \underline{p}_1(M,t)$

Caractère longitudinal

On déduit de l'équation d'Euler :

Les ondes sonores dans les fluides sont longitudinales : la vitesse des particules de fluides due à l'onde est parallèle à la direction de propagation de l'onde.

- Cette propriété reste vraie pour les ondes planes progressives quelconques : $p_1(M,t) = f(x - ct)$.

Impédance acoustique

La surpression et la vitesse sont en phase en tout point, à chaque instant.

L'impédance acoustique d'un fluide de masse volumique μ_0 et de coefficient de compressibilité adiabatique χ_S est définie, pour une onde plane progressive harmonique, par

$$Z_a = \frac{p_1(M,t)}{v_1(M,t)} = \mu_0 c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\chi_S}}$$

- L'impédance acoustique ne dépend que des caractéristiques du milieu de propagation.
- L'impédance acoustique relative à une OPPH se propageant dans le sens opposé est $Z_a = -\mu_0 c$.
- **Cette expression de l'impédance acoustique se généralise aux ondes planes progressives de forme quelconque** [1].

1. Ondes planes progressives non harmoniques.

- Pour une onde non plane ou non progressive, la surpression et la vitesse ne sont *a priori* pas en phase.
- Dans le cas d'une onde sonore se propageant dans un tuyau de section S, on définit parfois l'impédance acoustique par $Z_\mathrm{a} = \dfrac{p_1}{Sv_1}$.

Énergie d'une onde sonore

Densité volumique d'énergie sonore

La présence d'une onde sonore est associée à la présence d'une énergie mécanique portée par les particules de fluide. La propagation de l'onde sonore se traduit par la propagation de cette énergie mécanique.
En présence d'une onde sonore, un volume $\mathrm{d}\tau$ contient une énergie $\mathrm{d}\mathcal{E} = e(M,t)\,\mathrm{d}\tau$ où la densité volumique d'énergie sonore $e(M,t)$ est donnée par

$$e(M,t) = \frac{1}{2}\mu_0\,\vec{v}_1^{\,2}(M,t) + \frac{1}{2}\chi_S\,p_1^2(M,t)$$

- Le terme $\frac{1}{2}\mu_0\,\vec{v}_1^{\,2}$ représente la densité volumique d'énergie cinétique du fluide en présence de l'onde sonore.
- Le terme $\frac{1}{2}\chi_S\,p_1^2$ représente la densité volumique d'énergie potentielle emmagasinée par le fluide sous l'effet des forces de pression en présence de l'onde sonore.

Vecteur densité de courant énergétique

La puissance $\mathrm{d}\mathcal{P}(t)$ transmise à travers une surface orientée $\mathrm{d}\vec{S}$ est donnée par le flux du vecteur densité de courant énergétique $\vec{\Pi}(M,t)$:

$$\mathrm{d}\mathcal{P}(t) = \vec{\Pi}(M,t)\cdot\mathrm{d}\vec{S} \qquad \text{avec} \qquad \vec{\Pi}(M,t) = p_1(M,t)\cdot\vec{v}_1(M,t)$$

- La norme $\|\vec{\Pi}(M,t)\|$ du vecteur densité de courant énergétique s'exprime en $\mathrm{W\cdot m^{-2}}$.
- Le bilan local d'énergie sonore s'écrit

$$\boxed{\frac{\partial e(M,t)}{\partial t} + \mathrm{div}\,\vec{\Pi}(M,t) = 0}$$

Cas de l'onde plane progressive harmonique

Pour une OPPH se propageant selon le vecteur unitaire $\vec{u}$:

$$e(M,t) = \mu_0 v_1^2(M,t) = \chi_S\,p_1^2(M,t) \qquad \text{et} \qquad \vec{\Pi}(M,t) = \mu_0 c\,v_1^2(M,t)\,\vec{u} = \frac{p_1^2(M,t)}{\mu_0 c}\,\vec{u}$$

- L'énergie d'une onde sonore progressive harmonique est également répartie entre l'énergie potentielle et l'énergie cinétique : $e_\mathrm{c}(M,t) = e_\mathrm{p}(M,t) = e(M,t)/2$.

Intensité et niveaux sonores

L'intensité sonore d'une onde acoustique est le flux surfacique moyen en temps du vecteur densité de courant énergétique :

$$I = \langle\|\vec{\Pi}(M,t)\|\rangle.$$

- L'intensité sonore représente la puissance moyenne transporté par l'onde par unité de surface.
- Elle s'exprime en $\mathrm{W\cdot m^{-2}}$.

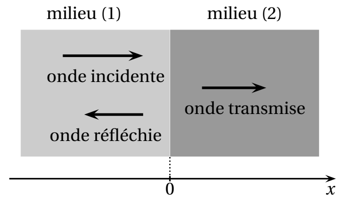
Le niveau sonore d'une onde acoustique dans l'air est défini par :

$$I_\mathrm{dB} = 10\log\frac{I}{I_0}$$

où l'intensité de référence est $I_0 = 10^{-12}\ \mathrm{W\cdot m^{-2}}$.

- Le niveau sonore s'exprime en décibels (dB).

Réflexion et transmission d'une onde sonore entre deux milieux



On considère deux milieux semi-infinis séparées par une interface plane en $x = 0$, appelée **dioptre acoustique**, donc les caractéristiques sont :

$x < 0$ **(milieu 1) :** μ_{10}, c_1, impédance acoustique Z_1 ;

$x > 0$ **(milieu 2) :** μ_{20}, c_2, impédance acoustique Z_2.

onde incidente : $p_\mathrm{i}(x,t) = f(t - x/c_1)$ et $v_\mathrm{i}(x,t) = f(t - x/c_1)/Z_1$;

onde réfléchie : $p_\mathrm{r}(x,t) = g(t + x/c_1)$ et $v_\mathrm{r}(x,t) = -g(t + x/c_1)/Z_1$;

onde transmise : $p_\mathrm{t}(x,t) = h(t - x/c_2)$ et $v_\mathrm{t}(x,t) = h(t - x/c_2)/Z_2$.

La vitesse et de la pression sont continues à l'interface : $v_\mathrm{i}(0,t) + v_\mathrm{r}(0,t) = v_\mathrm{t}(0,t)$ et $p_\mathrm{i}(0,t) + p_\mathrm{r}(0,t) = p_\mathrm{t}(0,t)$.

Coefficients de réflexion en amplitude

On définit $r_\mathrm{v} = \dfrac{v_\mathrm{r}(0,t)}{v_\mathrm{i}(0,t)}$ et $r_\mathrm{p} = \dfrac{p_\mathrm{r}(0,t)}{p_\mathrm{i}(0,t)}$. On établit $\boxed{r_\mathrm{v} = \dfrac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}}$ et $\boxed{r_\mathrm{p} = \dfrac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2}}$.

Coefficients de transmission en amplitude

On définit $t_\mathrm{v} = \dfrac{v_\mathrm{t}(0,t)}{v_\mathrm{i}(0,t)}$ et $t_\mathrm{p} = \dfrac{p_\mathrm{t}(0,t)}{p_\mathrm{i}(0,t)}$. On établit $\boxed{t_\mathrm{v} = \dfrac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}}$ et $\boxed{r_\mathrm{p} = \dfrac{2Z_2}{Z_1 + Z_2}}$.

- La transmission se fait sans déphasage : $t_\mathrm{v} > 0$ et $t_\mathrm{p} > 0$.
- La réflexion se fait avec un changement de signe (déphasage π) pour la surpression ou la vitesse selon le signe de $Z_1 - Z_2$.
- Dans le milieu (2), on observe une onde progressive.
- Dans le milieu (1), l'onde est *a priori* ni stationnaire ni progressive. Cas particuliers :
  - On observe une onde progressive si $Z_1 = Z_2$. Il n'y a pas d'onde réfléchie ; on dit que les impédances acoustiques des deux milieux sont adaptées.
  - Si l'onde incidente est harmonique, on observe une onde stationnaire si $Z_2 = 0$ ($P(x,t) = P_0$ pour $x > 0$; cas d'un tuyau ouvert) ou si $Z_2 \to \infty$ (obstacle rigide en $x = 0$; cas d'un tuyau fermé).

Coefficients de réflexion et de transmission pour les puissances sonores

On définit $R = \dfrac{I_\mathrm{r}(0,t)}{I_\mathrm{i}(0,t)}$ et $T = \dfrac{I_\mathrm{t}(0,t)}{I_\mathrm{i}(0,t)}$. On établit $\boxed{R = \left(\dfrac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}\right)^2}$ et $\boxed{T = \dfrac{4Z_1Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}}$.

- La relation $\boxed{R + T = 1}$ traduit la conservation de l'énergie sonore à l'interface.
- Si $Z_1 = Z_2$ (impédances des deux milieux adaptées), on a $R = 0$ et $T = 1$. Le coefficient T diminue rapidement quand l'écart entre Z_1 et Z_2 augmente.
  Une interface ne transmet correctement les ondes acoustiques que si les impédances des deux milieux sont proches..