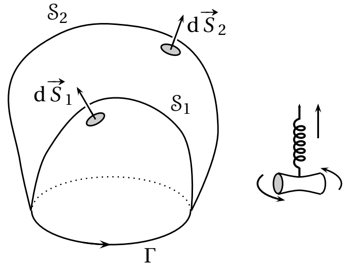
Électromagnétisme

Rappel — Le théorème d'Ampère

1. Contour et surface orientés

L'orientation d'un contour Γ fixe l'orientation de toute surface $\mathcal{S}$ s'appuyant sur le contour selon la règle de Maxwell : un tire-bouchon dont le manche tourne dans le sens positif du contour avance en traversant la surface dans le sens positif (sens de $\mathrm{d}\vec{S}$) :



2. Énoncé

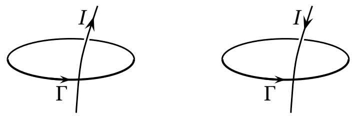
Étant donné un contour orienté Γ, la circulation du champ magnétostatique sur ce contour s'écrit

$$\oint_{P\in\Gamma} \vec{B}(P)\cdot \mathrm{d}\vec{\ell}_P = \mu_0 I_{\text{enlacé}}, \tag{1}$$

où $I_{\text{enlacé}}$ est l'intensité totale du courant traversant le contour Γ.

➤ Le contour Γ n'a pas de réalité physique, il est purement « fictif » et n'a aucune raison de correspondre avec un contour réel de la distribution étudiée.

➤ Le sens d'orientation du contour est déterminé arbitrairement. L'orientation du contour détermine alors le signe de $I_{\text{enlacé}}$:



$I_{\text{enlacé}} = I$ $\qquad$ $I_{\text{enlacé}} = -I$

3. Utilisation pour le calcul d'un champ magnétique

1) Principe

Le théorème d'Ampère est toujours vrai : pour tout contour Γ, le champ magnétique permanent vérifie toujours (1). En revanche, cette relation ne permet de calculer $\vec{B}(M)$ en tout point M de l'espace que dans des situations « à haut degré de symétrie ».
Dans la pratique, les propriétés de symétrie et d'invariance du système doivent être telles que l'on peut trouver un système de coordonnées tel que :
– le champ n'a de composante non nulle que selon un seul des vecteurs de base $\vec{e}_\gamma$;
– cette composante ne dépend que d'une seule coordonnées d'espace α.
Le champ peut donc se mettre sous la forme $\vec{B}(M) = B(\alpha)\,\vec{e}_\gamma$.

2) Choix du contour orienté

Étant donné un point M quelconque de l'espace où l'on veut calculer le champ, il s'agit de trouver un contour Γ :
– qui passe par le point M considéré ;
– tel qu'en chacun de ses points P, le champ $\vec{B}(P)$ est :
  – soit normal à Γ. On a alors $\vec{B}(P)\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}_P = 0$;
  – soit tangent à Γ, sa composante étant égale (au signe près) à la composante $B(\alpha)$ de $\vec{B}(P)$; on a alors $\vec{B}(P)\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}_P = \pm B(\alpha)\,\mathrm{d}\ell$.

La circulation totale $\oint_{P\in\Gamma}\vec{B}(P)\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}_P$ ne dépendra alors que de la composante $B(\alpha)$ du champ en M, ce qui permet de déterminer ce champ.

Dans la pratique, on cherchera un contour qui coïncide au maximum avec la ligne de champ passant par M ; on le complétera avec des portions perpendiculaires au champ.

Le choix du contour d'Ampère ne peut se faire qu'après une discussion soignée des symétries et invariances de la distribution de courants.

Il est nécessaire de préciser l'orientation du contour. De ce choix (arbitraire) dépend le signe de la circulation de $\vec{B}$ et de l'intensité enlacée $I_{\text{enlacée}}$.

Invariances : elles permettent de conclure que les composantes de $\vec{B}$ sont indépendantes de certaines coordonnées.

Symétries : elles permettent de conclure que certaines composantes du champ $\vec{B}$ sont nulles. On utilise les propriétés suivantes :
– *en tout point d'un plan Π^* d'anti-symétrie d'une distribution de courants, le champ $\vec{B}$ est contenu dans ce plan ;*
– *en tout point d'un plan Π de symétrie d'une distribution de courants, le champ $\vec{B}$ est normal à ce plan ;*

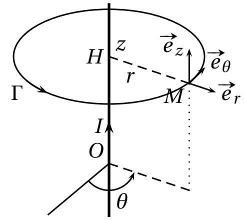
➤ Écrire qu'un champ est contenu dans un plan revient à écrire que sa composante normale au plan est nulle. On cherchera donc les plans de symétrie définis par la donnée de M et de deux vecteurs de base. La composante du champ électrique sur le troisième vecteur de base est alors nulle.

➤ Écrire qu'un vecteur est normal à un plan détermine entièrement sa direction ; un plan d'anti-symétrie est plus « efficace » qu'un plan de symétrie !

➤ Si besoin, on pourra étudier la parité de la composante non nulle du champ.

3) Exemple fondamental

Déterminer le champ magnétostatique créé en tout point M par un fil infini d'axe Oz, parcouru par un courant d'intensité I.
On se place en coordonnées cylindriques d'axe Oz confondu avec le fil.



Le champ magnétique s'écrit *a priori* en tout point M de l'espace :

$$\vec{B}(M) = B_r(r,\theta,z)\,\vec{e}_r + B_\theta(r,\theta,z)\,\vec{e}_\theta + B_z(r,\theta,z)\,\vec{e}_z$$

Peut-on annuler certaines composantes du champ ?
Le plan $(M; \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est un plan de symétrie de la distribution de courant, donc

$$B_r(r,\theta,z) = B_z(r,\theta,z) = 0\,.$$

Le champ magnétique est orthoradial ; en notant $B(r,\theta,z)$ sa composante, on a :

$$\vec{B}(M) = B(r,\theta,z)\,\vec{e}_\theta$$

- ➤ Le plan $(M; \vec{e}_r\, \vec{e}_\theta)$ est un plan d'anti-symétrie ; le champ magnétique est donc contenu dans ce plan, d'où $B_z = 0$. Cela ne présente aucun intérêt d'envisager ce plan.

Peut-on réduire la dépendance des coordonnées du champ vis-à-vis de certaines variables ?
La distribution étant invariante par translation selon Oz, les composantes de $\vec{B}(M)$ ne dépendent pas de z. De même, la distribution étant invariante par toute rotation d'angle θ, les composantes de $\vec{B}(M)$ ne dépendent pas de θ. Finalement, en tout point M de l'espace :

$$\vec{B}(M) = B(r)\,\vec{e}_\theta$$

Les propriétés de symétrie montrent que le théorème d'Ampère est opérationnel :

$$\oint_{M\in\Gamma} \vec{B}(M)\cdot \mathrm{d}\vec{\ell}_M = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$$

Quel contour choisir pour appliquer le théorème d'Ampère ?
La ligne de champ passant par M est le cercle de centre H, projection orthogonale de M sur Oz, de rayon r. Choisissons comme contour de cercle, orienté selon $\vec{e}_\theta$. En chacun de ses points, le champ $\vec{B}(M)$ est tangent à ce contour par construction ; de plus sa norme garde la même valeur car elle ne dépend que de r. Comme $\mathrm{d}\vec{\ell} = \mathrm{d}l\,\vec{e}_\theta$, la circulation du champ magnétique vaut :

$$\oint_{M\in\Gamma} \vec{B}(M)\cdot \mathrm{d}\vec{\ell}_M = \oint_{M\in\Gamma} B(r)\mathrm{d}\ell = B(r)\oint_{M\in\Gamma} \mathrm{d}\ell = 2\pi r B(r)$$

Compte tenu de l'orientation du contour, l'intensité traversant toute surface orientée s'appuyant sur Γ vaut $I_{\text{enlacé}} = I$. Le théorème d'Ampère s'écrit alors :

$$2\pi r B(r) = \mu_0 I$$

d'où

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,\vec{e}_\theta$$

- ➤ Le champ magnétique n'est pas défini sur un courant filiforme ($r = 0$).
- ➤ Les lignes de champ sont des cercles d'axe Oz.
- ➤ Dans les deux exemples précédents, le calcul du flux a été détaillé bien plus qu'il n'est demandé dans une rédaction. Le calcul du flux doit être fait « automatiquement ». Il faut connaître :

En coordonnées cylindriques

Circulation d'un vecteur orthoradial $\vec{A}(M) = A(r)\,\vec{e}_\theta$ le long d'un cercle Γ de centre O, axe Oz et de rayon r, orienté selon $\vec{e}_\theta$:

$$\oint_{M\in\Gamma} \vec{A}(M)\cdot \mathrm{d}\vec{\ell}_M = 2\pi r A(r)$$

4) Ce qu'il faut savoir faire

En reprenant l'exemple précédent :

1. Choisir un système de coordonnées adapté au problème.

2. Mener rigoureusement la discussion sur les symétries et les invariances, afin d'arriver à un champ de la forme $\vec{B}(M) = B(\alpha)\,\vec{e}_\gamma$.

3. Choisir le contour d'Ampère Γ en comprenant ce choix. Préciser l'orientation choisie.

4. Calculer la circulation de $\vec{B}$ le long de Γ.

5. Déterminer $I_{\text{enlacé}}$.

6. Appliquer enfin le théorème d'Ampère pour établir l'expression de $\vec{B}(M)$.