Mécanique des fluides

V — Bilans dynamiques et thermodynamiques

Bilans macroscopiques en régime stationnaire

Soit Σ un système *ouvert* pour lequel on veut écrire le bilan d'une grandeur extensive G.

1. On définit un système *fermé* $\mathcal{S}$, qui contient donc la même quantité de matière entre les instants t et $t+\mathrm{d}t$. En particulier $m(t+\mathrm{d}t) = m(t)$.

2. Si c'est possible, on se place dans un référentiel $\mathcal{R}$ où l'écoulement est *stationnaire*.

3. On linéarise la variation de la grandeur G entre t et $t+\mathrm{d}t$; le taux de variation de G, relatif à un système fermé, s'écrit comme une dérivée particulaire (on suit le fluide dans son écoulement) :

$$\boxed{\frac{\mathrm{D}G}{\mathrm{D}t} = \lim_{\mathrm{d}t\to 0} \frac{G(t+\mathrm{d}t)-G(t)}{\mathrm{d}t}}$$

4. On applique un théorème de la mécanique ou de la thermodynamique qui relie $\frac{\mathrm{D}G}{\mathrm{D}t}$ à une cause physique.

- On définira le système fermé en le représentant, à l'aide de deux schémas soignés, aux instants t et $t+\mathrm{d}t$.
- La grandeur G peut être scalaire ou vectorielle.

Bilan de masse

Le système étant fermé par construction :

$$\boxed{\frac{\mathrm{D}M}{\mathrm{D}t} = 0}$$

- Dans le cas d'un fluide en écoulement dans une conduite, on a égalité des débits massiques à l'entrée et à la sortie du système ouvert : $\boxed{D_{\mathrm{m,e}} = D_{\mathrm{m,s}}}$.

Bilan de quantité de mouvement

Le taux de variation de la quantité de mouvement du système fermé vérifie le **théorème de la résultante dynamique** :

$$\frac{\mathrm{D}\vec{P}}{\mathrm{D}t} = \vec{F}_{\mathrm{ext}}$$

- Seules les actions extérieures interviennent. On peut éliminer une action inconnue en définissant un système qui la rende intérieure.
- Si le référentiel n'est pas galiléen, il faut ajouter les forces d'inertie.
- **La résultante des forces de pression uniforme sur une surface fermée est nulle :**

$$\boxed{\oiint_{M\in\Sigma} P_0\,\mathrm{d}\vec{S}_M = \vec{0}}$$

Bilan de moment cinétique

Le taux de variation du moment cinétique du système fermé vérifie le **théorème du moment cinétique** :

$$\frac{\mathrm{D}\vec{L}_O}{\mathrm{D}t} = \vec{\mathcal{M}}_{\mathrm{ext}}(O)$$

où O est un point fixe dans le référentiel d'étude.

- Seules les actions extérieures interviennent. On peut éliminer une action inconnue en définissant un système qui la rende intérieure.
- Si le référentiel n'est pas galiléen, il faut ajouter les moments des forces d'inertie.
- **Le moment résultant en un point O des forces de pression uniforme sur une surface fermée est nul :**

$$\boxed{\oiint_{M\in\Sigma} \overrightarrow{OM}\wedge P_0\,\mathrm{d}\vec{S}_M = \vec{0}}$$

Bilan d'énergie cinétique

Le taux de variation de l'énergie cinétique du système fermé vérifie le **théorème de l'énergie cinétique** :

$$\frac{\mathrm{D}E_{\mathrm{c}}}{\mathrm{D}t} = \mathcal{P}_{\mathrm{int}} + \mathcal{P}_{\mathrm{ext}}$$

- Il faut tenir compte des puissances des actions extérieures et intérieures.
- Si la vitesse du point d'application d'une action est nulle (contrainte visqueuse sur une paroi fixe par exemple), sa puissance est nulle.

Bilan énergétique

Le taux de variation de l'énergie du système fermé est donné par le **premier principe** :

$$\boxed{\frac{\mathrm{D}U}{\mathrm{D}t} + \frac{\mathrm{D}E_{\mathrm{c}}}{\mathrm{D}t} = \frac{\delta W_{\mathrm{ext}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\delta Q}{\mathrm{d}t}}$$

où δW_{ext} est le travail de toutes les actions extérieures (conservatives ou non) reçu par le système fermé pendant $\mathrm{d}t$.

- En notant $\delta W_{\mathrm{ext}} = -\mathrm{d}E_{\mathrm{p}} + \delta W_{\mathrm{n.c.}}$ où $\delta W_{\mathrm{n.c.}}$ est le travail des forces non conservatives, le bilan s'écrit
$$\frac{\mathrm{D}(U+E_{\mathrm{c}}+E_{\mathrm{p}})}{\mathrm{D}t} = \frac{\delta W_{\mathrm{n.c.}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\delta Q}{\mathrm{d}t}$$

Dans le cas d'un système en écoulement, on peut écrire entre deux sections A et B :

$$D_{\mathrm{m}}\left[(h_B-h_A)+\frac{1}{2}(v_B^2-v_A^2)+g(z_B-z_A)\right] = \mathcal{P}_{\mathrm{m}} + \mathcal{P}_Q$$

où D_{m} est le débit massique, h l'enthalpie massique, u l'énergie interne massique, v la vitesse du fluide, z la verticale ascendante ; $\mathcal{P}_Q$ représente la puissance thermique reçue par le système.

- La *puissance mécanique*, ou puissance utile $\mathcal{P}_m$, ne tient pas compte de la puissance des forces de pression, ce terme étant inclus dans la variation d'enthalpie massique.
- Pour un fluide obéissant à la second loi de Joule (comme le gaz parfait, ou une phase condensée incompressible et indilatable), on a $h_B - h_A = c_P(T_B - T_A)$.