Mécanique

I — Cinématique

Référentiel d'observation

Repère d'espace

Un repère d'espace est défini par la donnée de 3 axes rattachés à un **solide de référence**.

- Un solide idéal est un système dont les distances entre dont les distances entre ses différents points restent contantes au cours du temps.
- Un tel repère est caractérisé par un point O choisi comme origine, et une base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ généralement orthonormée.

Repère de temps

Un repère de temps est défini par la donnée d'un instant t_0 de référence et d'une échelle de temps permettant de mesurée des durées.

- Dans le cadre de la relativité galiléenne, le temps est absolu : il s'écoule de la même manière dans tous les référentiels.

Référentiel

Un référentiel est défini par la donnée d'un repère d'espace et d'un repère de temps.

Exemples :
- le *référentiel terrestre* (ou *référentiel du laboratoire*) dont le solide de référence est la Terre ;
- le *référentiel géocentrique* attaché à des axes issus de centre de la Terre et dirigés vers des étoiles fixes ;
- le *référentiel héliocentrique* attaché à des axes issus de centre du Soleil et dirigés vers des étoiles fixes ;

Vecteur position

Soit un référentiel $(\mathcal{R})$ et O un point origine fixe dans $(\mathcal{R})$. La position à l'instant d'un point M dans l'espace est repérée par son **vecteur position**

$$\boxed{\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM}(t)}\,.$$

La **trajectoire** d'un point M dans le référentiel $(\mathcal{R})$ est l'ensemble de points qu'il occupe au cours du temps.

- La trajectoire d'un point dépend du référentiel d'étude.

Vecteur vitesse

Le **vecteur vitesse** d'un point M dans un référentiel $(\mathcal{R})$ est défini par

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}}.$$

- Le vecteur vitesse dépend du référentiel d'étude.
- En chaque point de la trajectoire, le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire.
- Les composantes du vecteur vitesse s'expriment en $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.
- La dérivation du vecteur position s'effectue dans le référentiel $(\mathcal{R})$.

Vecteur accélération

Le **vecteur accélération** d'un point M dans un référentiel $(\mathcal{R})$ est défini par

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{M/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}\right)_{\mathcal{R}}.$$

- Le vecteur accélération dépend du référentiel d'étude.
- Les composantes du vecteur accélération s'expriment en $\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

Bases de projection

Les vecteurs $\overrightarrow{OM}$, $\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$ et $\vec{a}_{M/\mathcal{R}}$ peuvent décrits par leurs composantes sur une base de projection. On utilise une base orthonormée directe, constitués de trois vecteur $(\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k)$ unitaires $(\|\vec{e}_i\| = 1)$ et orthogonaux. L'espace est conventionnellement orienté dans le sens direct.

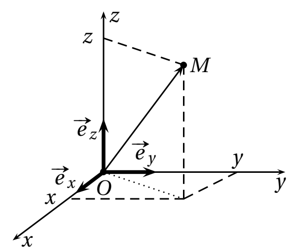
Coordonnées cartésiennes

Un point est repéré par ses trois coordonnées x, y et z : $\boxed{M(x, y, z)}$.

Le vecteur position s'écrit $\boxed{\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z}$.

Le vecteur vitesse s'écrit $\boxed{\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z}$.

Le vecteur accélération s'écrit $\boxed{\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z}$.



- La base cartésienne est une **base fixe** : les vecteurs $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$ sont indépendants de M et fixes dans $\mathcal{R}$.

Coordonnées cylindriques

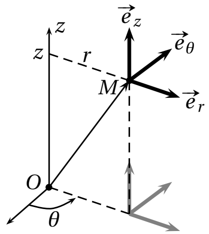
Un point est repéré par ses trois coordonnées r, θ et z : $\boxed{M(r,\theta,z)}$.

Le vecteur position s'écrit $\boxed{\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r + z\,\vec{e}_z}$.

Le vecteur vitesse s'écrit $\boxed{\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \dot{z}\,\vec{e}_z}$.

Le vecteur accélération s'écrit

$\boxed{\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\vec{e}_\theta + +\ddot{z}\,\vec{e}_z}$.



- La base cartésienne est une **base mobile** : les vecteurs $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ dépendent de M et ne sont pas fixes dans $\mathcal{R}$ si M est mobile.
- Les expressions de la vitesse et de l'accélération se retrouvent facilement à l'aide des relations :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}\,\vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}\,\vec{e}_r$$

- Ces relations sont issues de $\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}\theta} = \vec{e}_\theta$ et $\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}\theta} = -\vec{e}_r$.

Choix de la base de projection

La base de projection est indépendante du référentiel $\mathcal{R}$ dans lequel est étudié le mouvement.
Un choix judicieux de système de coordonnées peut considérablement simplifier l'étude d'une trajectoire : la base cylindrique sera choisie pour l'étude d'un mouvement circulaire.

Mouvement uniformément accéléré

Un tel mouvement est caractérisé par un vecteur accélération constant $\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \vec{a}_0$.

- On en déduit $\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \vec{a}_0\,t + \vec{v}_0$ et $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{a}_0\,t^2 + \vec{v}_0\,t + \overrightarrow{OM_0}$ en notant $\vec{v}_0 = \vec{v}(t=0)$ et M_0 la position de M en $t = 0$.

Si $\vec{v}_0$ et $\vec{a}_0$ sont colinéaires, le mouvement est **rectiligne uniformément accéléré**.

- La base cartésienne est adaptée à l'étude d'un mouvement rectiligne. En prenant $\vec{a} = a_0\,\vec{e}_x$, on en déduit $\vec{v}(t) = v(t)\,\vec{e}_x$ avec $v(t) = a_0\,t + v_0$, et $\overrightarrow{OM} = x(t)\,\vec{e}_x$ avec $x(t) = \frac{1}{2}t^2 + v_0\,t + x_0$.

Si $\vec{a}_0 = \vec{0}$, le mouvement est **rectiligne uniforme**. Avec $\vec{v}_0 = v_0\,\vec{e}_x$, on obtient en projection selon $\vec{e}_x$: $v(t) = v_0$ et $x(t) = v_0\,t + x_0$.

Mouvement circulaire

Un mouvement circulaire de centre O est défini, en coordonnées polaires de centre O, par $r = R$ constant.
On en déduit $\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = R\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$ et $\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = -R\dot{\theta}^2\,\vec{e}_r + R\ddot{\theta}\,\vec{e}_\theta$.
En notant $\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = v(t)\,\vec{e}_\theta$, soit $\boxed{v(t) = R\dot{\theta}}$ on peut écrire

$$\boxed{\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = -\frac{v^2}{R}\,\vec{e}_r + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\vec{e}_\theta}\,.$$

Le mouvement est dit **circulaire uniforme** si $\dot{\theta} = \omega = \text{cte}$ (vitesse angulaire constante) :

$$\boxed{\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = -R\omega^2\,\vec{e}_r = -\frac{v^2}{R}\,\vec{e}_r}\,.$$