Mécanique des fluides

II — Dynamique des fluides parfaits

Fluide parfait : on néglige la viscosité et la tension superficielle.

Équation d'Euler

On considère un fluide parfait, dans le champ de pesanteur $\vec{g}$ considéré comme uniforme, étudié dans un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen.
Le principe fondamental appliqué à une particule de fluide conduit à l'équation d'Euler :

$$\mu \frac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,P + \mu\vec{g}$$

En développant la dérivée particulaire, on peut l'écrire sous deux formes :

$$\boxed{\mu\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\,\vec{v}\right) = -\overrightarrow{\text{grad}}\,P + \mu\vec{g}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\mu\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}}\,\frac{v^2}{2} + (\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v})\wedge\vec{v}\right) = -\overrightarrow{\text{grad}}\,P + \mu\vec{g}}$$

- L'équivalent volumique des forces de pression est $-\overrightarrow{\text{grad}}\,P$: la résultante des forces de pression s'exerçant sur une particule de fluide de volume $\mathrm{d}\tau$ est $\mathrm{d}\vec{F}_{\mathrm{p}} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,P\,\mathrm{d}\tau$.
- Si la particule de fluide est soumise à d'autres forces de résultante $\mathrm{d}\vec{F} = \vec{f}_{\mathrm{v}}\,\mathrm{d}\tau$, où $\vec{f}_{\mathrm{v}}$ est la force volumique correspondante, il faut ajouter le terme $\vec{f}_{\mathrm{v}}$ à l'équation d'Euler :

$$\mu \frac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,P + \mu\vec{g} + \vec{f}_{\mathrm{v}}$$

Équation d'Euler en référentiel non galiléen

Il faut prendre en compte les les accélération d'entraînement $\vec{a}_{\mathrm{e}}(M)$ et de Coriolis $\vec{a}_{\mathrm{C}}(M)$:

$$\mu \frac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,P + \mu\vec{g} - \mu\vec{a}_{\mathrm{e}}(M) - \mu\vec{a}_{\mathrm{C}}(M)$$

Référentiel en translation :

$$\vec{a}_{\mathrm{e}} = \vec{a}_{O'/\mathcal{R}} = \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OO'}}{\mathrm{d}t^2} \quad \text{et} \quad \vec{a}_{\mathrm{C}}(M) = \vec{0}$$

Référentiel en rotation uniforme autour d'un axe fixe :

$$\vec{a}_{\mathrm{ie}}(M) = \vec{\Omega}\wedge(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OM}) \quad \text{et} \quad \vec{a}_{\mathrm{iC}}(M) = 2\vec{\Omega}\wedge\vec{v}_{M/\mathcal{R}'}$$

- Dans le cas d'un référentiel en rotation uniforme autour d'un axe fixe Oz, l'accélération d'entraînement s'écrit en coordonnées cylindriques $\boxed{\vec{a}_{\mathrm{ie}}(M) = -\Omega^2 r\,\vec{e}_r}$

Statique des fluides en référentiel non galiléen

Le fluide étant au repos dans le référentiel $\mathcal{R}'$, on a $\vec{v}_{M/\mathcal{R}'}$, d'où $\vec{a}_{\mathrm{iC}} = \vec{0}$, et

$$\vec{0} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,P + \mu\vec{g} - \mu\vec{a}_{\mathrm{ie}}(M)$$

Jet libre

Dans un jet de liquide à l'air libre, en l'absence de toute paroi, la pression est égale à la pression ambiante P_0.

Relation de Bernoulli

L'axe Oz est pris selon la verticale ascendante.

Écoulement stationnaire, incompressible et irrotationnel d'un fluide homogène

$$\frac{P}{\mu} + \frac{v^2}{2} + gz = C\,; \qquad \text{constante dans tout le fluide}$$

Écoulement stationnaire, incompressible et tourbillonnaire

$$\frac{P}{\mu} + \frac{v^2}{2} + gz = C(\mathcal{L})\,; \qquad \text{constante le long d'une ligne de courant}$$

Interprétation énergétique

La relation de Bernoulli peut s'écrire :

$$\underbrace{P}_{\substack{\text{énergie potentielle}\\ \text{volumique}\\ \text{des forces de pression}}} + \underbrace{\mu\frac{v^2}{2}}_{\substack{\text{énergie cinétique}\\ \text{volumique}}} + \underbrace{\mu g z}_{\substack{\text{énergie potentielle}\\ \text{volumique de pesanteur}}} = \text{Cte}$$

Elle traduit la **conservation de l'énergie** : l'énergie d'une particule de fluide reste constante au cours de son mouvement.

- Dans le cas d'un écoulement irrotationnel, l'énergie volumique d'une fluide a la même valeur dans tout le volume du fluide ; un tel écoulement est dit *à énergie constante.*
- Dans le cas d'un écoulement tourbillonnaire, l'énergie d'une particule de fluide reste constante au cours de son mouvement, mais sa valeur varie d'une ligne de courant à une autre.
- Le terme $P + \mu g z$ est appelé *pression motrice.*
- Le terme $\dfrac{\mu v^2}{2}$ est appelé *pression dynamique.*
- Le terme $P + \dfrac{\mu v^2}{2}$ est appelé *pression de stagnation.*

Écriture en terme de charge

La relation de Bernoulli s'écrit

$$\frac{P}{\mu g} + \frac{v^2}{2g} + z = \mathrm{C}$$

où la constante C, homogène à une hauteur, est appelée **charge totale** de l'écoulement.

- Le terme $\dfrac{P}{\mu g} + z$ est appelé *hauteur piezométrique.*

Applications de la relation de Bernoulli

Effet Venturi

On observe une baisse de pression lorsqu'un fluide s'écoule par un étranglement où sa vitesse augmente.

- Lorsque la pression devient inférieure à la pression de vapeur saturante, on observe l'apparition de bulles de vapeur au sein du liquide qui implosent ensuite rapidement, créant des dommages aux structures (conduites, hélices, etc.). C'est le phénomène de cavitation.

Formule de Torricelli

On considère un récipient à l'air libre empli d'un liquide. La vitesse du liquide sortant d'un trou percé à une distance h sous la surface libre du liquide est donnée, si la section du trou est petite devant celle du récipient, par

$$\boxed{v = \sqrt{2gh}}$$

- C'est la vitesse d'un corps après une chute libre de la même hauteur h.

Écoulement non stationnaire, incompressible et tourbillonnaire

On considère une ligne de courant Γ reliant deux points A et B. En intégrant l'équation d'Euler le long de cette ligne de courant, on obtient

$$\int_A^B \frac{\partial v}{\partial t}\,\mathrm{d}l + \left[\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\mu} + gz\right]_A^B = 0\,.$$

- Il faut que la ligne de courant ne se déforme pas dans le temps pour que l'on puisse écrire

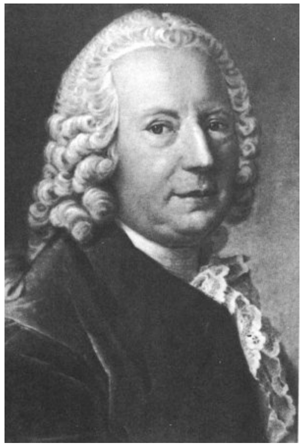
$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \frac{\partial v}{\partial t}\,\mathrm{d}l$$

- Si l'écoulement a lieu dans un conduite de section s constante, on a $v(t) = \text{cte} = v_A(t) = v_B(t)$ en tout point d'une ligne de courant à l'instant t, et la relation précédente s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}L + \left[\frac{P}{\mu} + gz\right]_A^B = 0$$

  où L est la longueur de la ligne de courant entre A et B.

Mais qui était-il ?



Daniel Bernoulli (1700-1782).
Mathématicien et physique suisse-allemand, issu d'une famille de grands mathématiciens. Il collabore avec son ami Euler en mathématiques comme en physique. Dans son traité *Hydrodynamica*, publié en 1738, il analyse l'écoulement d'un liquide par le trou d'un récipient et discute les principes de fonctionnement des pompes et autres techniques d'élévation de l'eau, à partir du principe de conservation de l'énergie (l'équation d'Euler a été établie postérieurement, en 1755). Il y énonce le théorème qui porte son nom.
Il étudie le problème des cordes vibrantes, avec d'Alembert.