Thermodynamique — II — Diffusion thermique

Les différents modes de transfert thermique

Convection La convection thermique est un transfert d'énergie thermique, par rapport à un référentiel donné, dû à un transport macroscopique de matière dans ce référentiel. Elle peut être libre, ou forcée quand le mouvement du fluide est imposé par un opérateur extérieur au système.

Rayonnement Le rayonnement thermique est un transfert d'énergie par une onde électromagnétique située principalement dans l'infrarouge. La longueur d'onde pour laquelle un maximum d'énergie est rayonnée dépend de la température du corps.

Diffusion La diffusion thermique est un transfert thermique d'origine microscopique (transmission de proche en proche du mouvement d'agitation thermique) au sein d'un milieu matériel dans lequel la température n'est pas uniforme. Ce transfert se fait des zones de températures élevées aux zones de basses températures et tend à rendre uniforme la distribution de température.

- ➤ Le transfert par rayonnement thermique est le seul pouvant avoir lieu dans le vide.
- ➤ La convection est le mode de transfert thermique principal dans les fluides.
- ➤ La conduction existe dans tous les corps matériels mais est souvent masquée par la convection dans les fluides.

Vecteur densité de courant thermique

Le transfert thermique diffusif à travers une surface élémentaire orientée $\mathrm{d}\vec{S}_M$ pendant $\mathrm{d}t$ s'écrit

$$\delta Q = \vec{\jmath}_{\mathrm{th}}(M,t)\cdot \mathrm{d}\vec{S}_M\,\mathrm{d}t$$

où $\vec{\jmath}_{\mathrm{th}}(M,t)$ est le **vecteur densité de courant thermique**, dont la norme s'écrit en $\mathrm{W\cdot m^{-2}}$.

- ➤ Le flux élémentaire $\boxed{\mathrm{d}\Phi = \vec{\jmath}_{\mathrm{th}}(M,t)\cdot \mathrm{d}\vec{S}_M}$ est appelé **flux thermique** ; il représente la **puissance thermique** traversant $\mathrm{d}\vec{S}_M$ et s'exprime en W.
- ➤ Le flux thermique est une grandeur algébrique ; son signe dépend de l'orientation de la surface.

Bilan d'énergie interne

On considère un phénomène de diffusion thermique unidimensionnel, selon la direction Ox, décrit par $\vec{\jmath}_{\mathrm{th}}(M,t) = j_{\mathrm{th}}(x,t)\vec{e}_x$ et $T(M,t) = T(x,t)$.
Soit un volume élémentaire $\mathrm{d}\tau$, possédant une énergie interne $\delta U(t)$. Sa variation d'énergie interne pendant un temps $\mathrm{d}t$ s'écrit

$$\boxed{\mathrm{d}(\delta U) = \delta U_{\text{éch}} + \delta U_{\text{prod}}},$$

où
- $\mathrm{d}(\delta U) = \delta U(t+\mathrm{d}t) - \delta U(t)$ est la variation d'énergie interne du système entre t et $t+\mathrm{d}t$;
- $\delta U_{\text{éch}} = \delta Q = \Phi\,\mathrm{d}t$ l'énergie interne échangée par transfert thermique avec l'extérieur ;
- δU_{prod} l'énergie interne « produite »[1]

- ➤ Le terme d'échange s'écrit comme un flux thermique à travers les frontières du système.

Dans le cas où le milieu est une phase condensée idéale de masse volumique ρ, de chaleur massique c, et en l'absence de terme de production ($\delta U_{\text{prod}} = 0$), le bilan d'énergie s'écrit

$$\rho c \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial j_{\mathrm{th}}}{\partial x}.$$

1. La « production » d'énergie interne est une conversion d'énergie sous forme d'énergie d'agitation thermique au sein du milieu : effet Joule, réaction exothermique, réaction nucléaire, etc. L'énergie totale est bien conservative.

- ➤ La variation d'énergie interne d'une tranche de section S comprise entre x et $x+\mathrm{d}x$ s'écrit, pour une phase condensée
$$\mathrm{d}(\delta U) = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$
En régime stationnaire, les grandeurs ne dépendent pas du temps ; en particulier $\mathrm{d}(\delta U) = 0$.

Cas du régime stationnaire

En régime stationnaire, les grandeurs ne dépendent pas du temps ; en particulier $\mathrm{d}(\delta U) = 0$. LE bilan d'énergie pendant $\mathrm{d}t$ s'écrit alors

$$0 = \delta U_{\text{éch}} + \delta U_{\text{prod}}.$$

Loi de Fourier

La loi de Fourier relie le courant de diffusion thermique au gradient de température :

$$j_{\mathrm{th}}(x,t) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x},$$

où $\lambda > 0$ (en $\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$) est la **conductivité thermique** du matériau. Un matériau bon conducteur de la chaleur est caractérisé par une conductivité thermique λ élevée.

- ➤ La loi de Fourier (1815) est *phénoménologique*. Elle est valable si les écarts températures ne sont si trop forts, ni trop faibles, ni trop rapides.
- ➤ Le signe − rend compte de l'orientation du flux thermique vers les basses températures.
- ➤ Dans le cas général, la loi de Fourier s'écrit
$$\vec{\jmath}_{\mathrm{th}} = -\lambda\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,T.$$
- ➤ Les électrons de conduction participent au transfert thermique par diffusion : les bons conducteurs électriques sont de bons conducteurs thermiques.

Équation de la diffusion thermique

Dans le cas d'une phase condensée où λ est indépendant de x, en l'absence de terme de production, la température vérifie l'équation de la diffusion thermique

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

- ➤ Cette équation est aussi appelée *équation de la chaleur*.
- ➤ On peut l'écrire
$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}} \quad \text{et} \quad \boxed{a = \frac{\lambda}{\rho c}}$$
où a est la **diffusivité thermique** du milieu.
- ➤ Si L est l'échelle de longueur caractéristique du problème et τ l'échelle de temps caractéristique, on a $\boxed{L \approx \sqrt{a\tau}}$. La diffusion est un phénomène lent : $L \propto \sqrt{\tau}$.
En particulier, une variation sinusoïdale de température de période τ appliqué à l'extrémité d'un milieu se propage en s'atténuant sur une distance d'autant plus petite que les oscillations sont rapides (τ est faible), c'est l'**effet de peau**.
- ➤ L'équation de la diffusion n'est pas invariante par renversement du temps (c'est-à-dire en effectuant le changement de variable $t' = -t$). Cela traduit le *caractère irréversible* du phénomène de diffusion.

- On a une bonne diffusion thermique dans un milieu de conductivité λ élevée (le flux thermique y est transmis facilement) et de capacité thermique volumique ρc faible (le milieu a un faible pouvoir de stockage de l'énergie sous forme thermique).
- La diffusivité a n'intervient qu'en régime variable ; en régime stationnaire, seule la conductivité λ intervient.

Conditions aux limites

Frontière Σ en contact avec un thermostat à la température T_0	La température est continue $T(M,t) = T_0 \quad \forall M \in \Sigma$.
Frontière calorifugée.	Le flux thermique est nul à travers la frontière.
Jonction entre deux solides	Le flux thermique et la température sont continus à la traversée de la jonction.
Frontière solide Σ au contact d'un fluide à la température T_0	Loi de Newton : $j_{\text{th}}(M,t) = h(T(M,t) - T_0) \quad \forall M \in \Sigma$.

- La température est une grandeur continue.
- On modélise les transferts conducto-convectifs sur une surface par une discontinuité de la température ; la loi de Newton décrit alors le transfert thermique pariétal.
- Le coefficient conducto-convectif h est plus élevé pour un liquide que pour un gaz, et augmente en convection forcée.
- Les conditions portant sur le flux se ramènent à des conditions portant sur la dérivée spatiale de la température *via* la loi de Fourier.
- La loi de Newton conduit à une relation entre la température et sa dérivée spatiale au niveau de la frontière.

Régime stationnaire : résistance et conductance thermiques

En régime stationnaire, le flux thermique est uniforme : $\boxed{\Phi = \text{cte}}$, indépendant de x.
La température varie de façon affine : $T(x) = \alpha + \beta x$.
On définit la **résistance thermique** R_{th} du matériau par

$$T_1 - T_2 = R_{\text{th}}\Phi.$$

- Attention aux signes : le flux est compté positivement de l'extrémité à la température T_1 vers l'extrémité à la température T_2.
- La résistance thermique d'un cylindre de longueur L et de section S est

$$R_{\text{th}} = \frac{L}{\lambda S}$$

- On définit la **conductance thermique** $\boxed{G_{\text{th}} = 1/R_{\text{th}}}$.
- Deux milieux sont en série s'ils sont traversés par le même flux thermique. Leur résistance thermique équivalente vaut $R_{\text{th}} = R_{\text{th},1} + R_{\text{th},2}$: **les résistances thermiques en série s'ajoutent.**
- Deux milieux sont en parallèle s'ils ont la même différence de température entre leurs extrémités. Leur conductance thermique équivalente vaut $G_{\text{th}} = G_{\text{th},1} + G_{\text{th},2}$: **les conductances thermiques en parallèle s'ajoutent.**
- Une interface entre une paroi solide et un fluide (loi de Newton) peut être décrite par une résistance thermique $\boxed{R_{\text{th}} = \dfrac{1}{hS}}$.

Analogies : diffusion thermique, diffusion particulaire et conduction électrique

Conduction électrique	**Diffusion thermique**	**Diffusion particulaire**
transfert de charges (q)	transfert thermique (Q)	transfert de particules (N)
vecteur densité de courant $\vec{j}$	$\vec{j}_{\text{th}}$	$\vec{j}_n$
intensité électrique $I = \iint \vec{j}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{\delta q}{\mathrm{d}t}$	flux thermique $\Phi = \iint \vec{j}_{\text{th}}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{\delta Q}{\mathrm{d}t}$	flux particulaire $\Phi = \iint \vec{j}_n\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{\delta n}{\mathrm{d}t}$
loi d'Ohm $\vec{j} = -\gamma \overrightarrow{\text{grad}}\, V$	loi de Fourier $\vec{j}_{\text{th}} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}\, T$	loi de Fick $\vec{j}_n = -D \overrightarrow{\text{grad}}\, n$
conductivité électrique γ	conductivité thermique λ	diffusivité D
potentiel électrique V	température T	densité particulaire n
résistance électrique R $V_1 - V_2 = RI$ $R = \frac{L}{\gamma S}$	résistance thermique R_{th} $T_1 - T_2 = R_{\text{th}}\Phi$ $R_{\text{th}} = \frac{L}{\lambda S}$	

Ordres de grandeur à connaître

métaux bons conducteurs électriques	$\lambda \approx 10^2\,\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
métaux médiocres conducteurs électriques	$\lambda \approx 10\,\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
béton, verre, eau	$\lambda \approx 1\,\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
air, laine de verre	$\lambda \approx 10^{-2}\,\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$

On a $\lambda \approx 400\,\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ pour l'argent et le cuivre.

Mais qui était-il ?

Joseph Fourier (Auxerre 1768 - Paris 1830).
Mathématicien et physicien français.
Il entre à l'ENS en 1794, où il suit les cours de Lagrange, Laplace et Monge. Après trois années en Egypte (expéditions napoléoniennes), il est nommé préfet de l'Isère en 1801.
En 1817, il devient secrétaire perpétuel de l'Académie des sciences en mathématiques.
Son travail le plus important porte sur l'étude de la propagation de la chaleur dans un solide. Il montre l'importance des conditions aux limites pour la résolution des équations aux dérivées partielles, et il cherche une solution sous forme d'une série trigonométrique. Il montre alors que toute fonction qui possède une surface sous son graphe (« intégrable ») peut être représentée comme une *série de Fourier*.
On lui doit la notation $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ de l'intégrale. Le symbole $\int$ est dû à Leibniz ; c'est un « s long », initiale de « somme » : *c'eſt ainſi que l'on écrivait ſomme !*