Électromagnétisme

II — Le champ électromagnétique variable

Équations de Maxwell

Dans un référentiel galiléen, le champ électromagnétique vérifie les équations de Maxwell :

Maxwell-Thomson	$\operatorname{div}\vec{B}(M,t)=0$	**Maxwell-Gauss**	$\operatorname{div}\vec{E}(M,t)=\dfrac{\rho(M,t)}{\varepsilon_0}$
Maxwell-Faraday	$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}(M,t)=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}(M,t)$	**Maxwell-Ampère**	$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B}(M,t)=\mu_0\left(\vec{\jmath}(M,t)+\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}(M,t)\right)$

- La permittivité diélectrique du vide ε_0 et la perméabilité magnétique du vide μ_0 vérifient de façon exacte $\varepsilon_0\mu_0 c^2=1$, où c est la célérité de la lumière dans le vide.
  On a fixé $\mu_0=4\pi\cdot10^{-7}\ \mathrm{H\cdot m^{-1}}$.
- Le terme $\vec{\jmath}_\mathrm{d}(M,t)=\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}(M,t)$, homogène à une densité volumique de courant, est appelé *courant de déplacement*.
- La conservation de la charge $\operatorname{div}\vec{\jmath}(M,t)+\dfrac{\partial\rho}{\partial t}(M,t)=0$ découle des équations de Maxwell.
- Les équations de Maxwell-Gauss et de Maxwell-Ampère relient le champ électromagnétique $\left[\vec{E}(M,t),\vec{B}(M,t)\right]$ à ses sources $\left[\rho(M,t),\vec{\jmath}(M,t)\right]$.
- Les équations de Maxwell-Thomson et de Maxwell-Faraday sont des relations de structure du champ électromagnétique ; elles ne font pas intervenir les sources $\rho(M,t)$ et $\vec{\jmath}(M,t)$.
- Les équations de Maxwell étant **linéaires**, on peut utiliser le **principe de superposition**, et utiliser la **notation complexe pour le régime harmonique**.
- Les équations de Maxwell sont valables dans n'importe quel milieu. Elles ne sont cependant utilisables sous cette forme que si l'on sait expliciter la source $\left[\rho,\vec{\jmath}\right]$ du champ dans le milieu considéré ; c'est le cas :
  - dans les milieux non diélectriques et non magnétiques, en particulier les conducteurs ohmiques ;
  - dans le vide ;
  - dans les plasmas.

Relations de passage

Le champ électromagnétique créé par une distribution volumique de charges et de courants est continue. Si l'on décrit la distribution par un modèle surfacique (distribution surfacique de charges et de courants), le champ électromagnétique subit une discontinuité à la traversée de la distribution.
Les équations de Maxwell ne peuvent pas s'écrire en un point d'une distribution surfacique de sources ; elles doivent être remplacées par les relations de passage :

$$\boxed{\vec{E}_2(M,t)-\vec{E}_1(M,t)=\frac{\sigma(M,t)}{\varepsilon_0}\vec{n}_{1\to2}}\quad\text{et}\quad\boxed{\vec{B}_2(M,t)-\vec{B}_1(M,t)=\mu_0\vec{\jmath}_\mathrm{s}\wedge\vec{n}_{1\to2}}$$

où $\vec{n}_{1\to2}$ est le vecteur unitaire normal à la distribution surfacique en M, dirigé du milieu (1) vers le milieu (2). Les points M_1 et M_2 appartenant respectivement aux milieux (1) et (2), on définit

$$\vec{E}_1(M,t)=\lim_{M_1\to M}\vec{E}(M_1,t)\quad\text{et}\quad\vec{E}_2(M,t)=\lim_{M_2\to M}\vec{E}(M_2,t)$$

- Les relations de passage découlent des équations de Maxwell. Elles sont valables en régime permanent comme en régime variable.
- À la traversée d'une distribution surfacique de charges, la composante normale du champ électrique est discontinue.
- À la traversée d'une distribution surfacique de courants, la composante tangentielle du champ magnétique est discontinue.

Forme intégrale des équations de Maxwell

Flux du champ électrique

$$\operatorname{div}\vec{E}(M,t)=\frac{\rho(M,t)}{\varepsilon_0}\iff\oiint_{M\in\Sigma}\vec{E}(M,t)\cdot\mathrm{d}\vec{S}_M=\frac{Q_\text{int}(t)}{\varepsilon_0}.$$

Le théorème de Gauss est valable sans restriction en régime variable, à condition que le flux du champ et la charge intérieure soient calculés au même instant t.

Flux du champ magnétique

Le champ magnétique est à flux conservatif :

$$\operatorname{div}\vec{B}(M,t)=0\iff\oiint_{M\in\Sigma}\vec{B}(M,t)\cdot\mathrm{d}\vec{S}_M=0,\ \forall\Sigma.$$

- Le flux du champ magnétique se conserve à travers toute section d'un tube de champ.
- Le flux du champ magnétique est le même à travers toute surface s'appuyant sur un contour Γ : on définit ainsi *le* flux traversant le contour Γ.

Circulation du champ électrique

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}(M,t)=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}(M,t)\iff\oint_{M\in\Gamma}\vec{E}(M,t)\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}_M=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_{P\in\Sigma}\vec{B}(P,t)\cdot\mathrm{d}\vec{S}_P.$$

Le champ électrique n'est pas à circulation conservative en régime variable (cf. le chapitre sur l'induction).

- À un champ magnétique variable est toujours associé un champ électrique à circulation non conservative.

Circulation du champ magnétique

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B}(M,t)=\mu_0\left(\vec{\jmath}(M,t)+\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}(M,t)\right)\iff\oint_{M\in\Gamma}\vec{B}(M,t)\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}_M=\mu_0\left[\iint_{P\in\Sigma}\vec{\jmath}(P,t)\cdot\mathrm{d}\vec{S}_P+\varepsilon_0\iint_{P\in\Sigma}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}(P,t)\cdot\mathrm{d}\vec{S}_P\right]$$
$$=\mu_0\left[I_\text{enlacé}(t)+I_\mathrm{d}(t)\right],$$

où l'intensité du courant déplacement à travers la surface Σ est définie par $I_\mathrm{d}(t)=\iint_{M\in\Sigma}\vec{\jmath}_\mathrm{d}(M,t)\cdot\mathrm{d}\vec{S}_M$.
Le théorème d'Ampère de la magnétostatique se généralise en prenant en compte l'intensité du courant de déplacement à travers le contour orienté.

- Le « courant de déplacement » $\vec{j}_\mathrm{d}(M,t) = \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}(M,t)$ est source de champ magnétique, comme un courant $\vec{j}(M,t)$. Ce terme ne traduit que les variations temporelles du champ électrique ; il n'y a ni courant, ni déplacement.

Potentiels scalaire et vecteur

Le champ électromagnétique $\left[\vec{E}(M,t), \vec{B}(M,t)\right]$ dérive d'un potentiel scalaire $V(M,t)$ et d'un potentiel vecteur $\vec{A}(M,t)$:

$$\boxed{\vec{E}(M,t) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V(M,t) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}(M,t)} \quad ; \quad \boxed{\vec{B}(M,t) = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{A}(M,t)}\,.$$

- Les potentiels sont continus.

Énergie électromagnétique

On considère une région de l'espace, de volume $\mathcal{V}$, délimitée par une surface fermée Σ, dans laquelle règne un champ électromagnétique $\left[\vec{E}(M,t), \vec{B}(M,t)\right]$. Ce domaine contient une énergie électromagnétique $\mathcal{U}_\mathrm{em}(t)$. Le bilan d'énergie pendant une durée $\mathrm{d}t$ s'écrit

$$\mathrm{d}\mathcal{U}_\mathrm{em} = \delta\mathcal{U}_\text{éch} + \delta\mathcal{U}_\mathrm{prod}\,,$$

où :

- $\mathrm{d}\mathcal{U}_\mathrm{em} = \mathcal{U}_\mathrm{em}(t+\mathrm{d}t) - \mathcal{U}_\mathrm{em}(t)$ est la variation d'énergie contenant dans le volume $\mathcal{V}$ pendant $\mathrm{d}t$;
- $\delta\mathcal{U}_\text{éch}$ est l'énergie échangée à travers la frontière Σ pendant $\mathrm{d}t$;
- $\delta\delta\mathcal{U}_\mathrm{prod}$ est l'énergie reçue par le champ de la part de la matière au sein du volume $\mathcal{V}$ pendant $\mathrm{d}t$.

Énergie contenue dans le champ

Il existe une énergie électromagnétique là où règne le champ, avec une densité volumique $u_\mathrm{em}(M,t)$:

$$\delta\mathcal{U}_\mathrm{em}(t) = \iiint_{M\in\mathcal{V}} u_\mathrm{em}(M,t)\,\mathrm{d}\tau_M\,.$$

Énergie transportée par le champ

Le champ transporte de l'énergie : c'est le phénomène de **rayonnement électromagnétique**. On associe à ce transport un vecteur densité de courant d'énergie électromagnétique $\vec{\Pi}(M,t)$: l'énergie traversant la surface orientée $\mathrm{d}\vec{S}_M$ pendant $\mathrm{d}t$ est donnée par

$$\delta^2\mathcal{U}_\text{éch} = \vec{\Pi}(M,t)\cdot\mathrm{d}\vec{S}_M\,\mathrm{d}t\,.$$

Source d'énergie

Le champ électromagnétique contenu dans le volume $\mathrm{d}\tau_M$ peut recevoir (algébriquement) de l'énergie de la part du milieu ; pendant $\mathrm{d}t$, l'énergie reçue par le champ dans le volume $\mathrm{d}\tau_M$ s'écrit

$$\delta^2 U_\mathrm{prod} = \sigma(M,t)\,\mathrm{d}\tau_M\,\mathrm{d}t\,,$$

où $\sigma(M,t)$ est le taux volumique de production d'énergie par unité de temps.

Formulation intégrale du bilan d'énergie

Le bilan de puissance [1] s'écrit sous la forme intégrale

$$\iiint_{M\in\mathcal{V}} \frac{\partial u_\mathrm{em}}{\partial t}(M,t)\,\mathrm{d}\tau_M = -\oiint_{P\in\Sigma} \vec{\Pi}(P,t)\cdot\mathrm{d}\vec{S}_P + \iiint_{M\in\mathcal{V}} \sigma(M,t)\,\mathrm{d}\tau_M\,.$$

- Attention au signe devant le flux de $\vec{\Pi}$: par convention des surface fermées, on compte positivement un flux *sortant*.

Formulation locale du bilan d'énergie

En tout point du domaine considéré :

$$\frac{\partial u_\mathrm{em}}{\partial t}(M,t) = -\,\mathrm{div}\,\vec{\Pi}(M,t) + \sigma(M,t)\,.$$

Identité de Poynting

Le bilan local est vérifié en prenant

$$\boxed{u_\mathrm{em}(M,t) = \varepsilon_0\frac{\vec{E}^2(M,t)}{2} + \frac{\vec{B}^2(M,t)}{2\mu_0}} \;;\; \boxed{\vec{\Pi}(M,t) = \frac{\vec{E}(M,t)\wedge\vec{B}(M,t)}{\mu_0}} \;;\; \boxed{\sigma(M,t) = -\vec{j}(M,t)\cdot\vec{E}(M,t)}$$

Le vecteur densité de courant d'énergie $\vec{\Pi}$ ainsi défini est appelé **vecteur de Poynting**.
Le bilan de puissance est alors appelé **équation locale de Poynting** :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0\frac{\vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}\right) = -\,\mathrm{div}\left(\frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}\right) - \vec{j}\cdot\vec{E}$$

- La norme $\|\vec{\Pi}\|$ s'exprime en $\mathrm{W\cdot m^{-2}}$.
- Le terme $\vec{j}\cdot\vec{E}$ représente la puissance volumique de la force de Lorentz. C'est par le travail de la force de Lorentz que se font les échanges d'énergie entre le champ électromagnétique et la matière.
- La puissance du terme magnétique de la force de Lorentz est nulle [2].
- On peut considérer la densité volumique d'énergie électromagnétique comme la somme d'une densité volumique d'énergie électrique $u_\text{él}(M,t) = \varepsilon\dfrac{\vec{E}^2(M,t)}{2}$ et d'une densité volumique d'énergie magnétique $u_\mathrm{m}(M,t) = \dfrac{\vec{B}^2(M,t)}{2\mu_0}$.
- Il n'y a pas unicité du choix de u_em et de $\vec{\Pi}$ vérifiant le bilan local. Les expressions de Poynting s'expriment en fonction des seuls champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$, mais il existe d'autres choix qui font intervenir les potentiels.

1. Le bilan d'énergie s'écrit sous forme d'un bilan de puissance après simplification par $\mathrm{d}t$.
2. On a $q(\vec{v}\wedge\vec{B})\cdot\vec{v} = 0$.

Équations de Maxwell dans l'ARQS

L'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS) est valable aux basses fréquences[3], dans un milieu conducteur. Les équations de Maxwell s'écrivent alors en négligeant le terme de courant de déplacement :

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \operatorname{div} \vec{B}(M,t) = 0 & ; & \operatorname{div} \vec{E}(M,t) = \dfrac{\rho(M,t)}{\varepsilon_0} \\[2ex] \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{E}(M,t) = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}(M,t) & ; & \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{B}(M,t) = \mu_0 \vec{j}(M,t) \end{array}}$$

- ➤ Dans l'ARQS, on a donc $\boxed{\operatorname{div} \vec{j} = 0}$, et ses conséquences dans les circuits électriques :
  - dans un conducteur filiforme, l'intensité est la même en tout point ;
  - loi des nœuds.
- ➤ Le champ magnétique se calcule comme en régime permanent. Cette approximation est aussi appelée **ARQS magnétique**.
- ➤ Le champ électrique ne se calcule pas comme en régime permanent : il n'est pas à circulation conservative.
- ➤ Il existe une autre approximation, appelée ARQS électrique, dans laquelle le champ électrique se calcule comme en régime permanent, mais pas le champ magnétique. Les équations de Maxwell s'écrivent alors

  $$\operatorname{div} \vec{B}(M,t) = 0\,;\ \operatorname{div} \vec{E}(M,t) = \frac{\rho(M,t)}{\varepsilon_0}\,;\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{E}(M,t) = \vec{0}\,;\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{B}(M,t) = \mu_0 \vec{j}(M,t) + \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(M,t)}{\partial t}$$

  Quand on parle d'« ARQS » sans préciser, il s'agit de l'ARQS magnétique.

Effet de peau dans un conducteur ohmique

Dans le cadre de l'ARQS, dans un conducteur ohmique de conductivité électrique γ constante, les champs $\vec{j}(M,t)$, $\vec{E}(M,t)$ et $\vec{B}(M,t)$ vérifient la même **équation de diffusion** :

$$\Delta \vec{j} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}\,; \qquad \Delta \vec{E} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\,; \qquad \Delta \vec{B} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Effet de peau

L'effet de peau traduit l'aptitude d'un conducteur à s'opposer à la pénétration d'un champ électromagnétique en son sein.
Le champ électromagnétique n'a de valeur significative qu'au voisinage de la surface du conducteur, sur une profondeur

$$\delta(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$$

d'autant plus petite que :
- la pulsation ω est élevée ;
- la conductivité γ du milieu est élevée (milieu bon conducteur).

3. Dans un métal, pour des fréquences $f \ll 10^{15}$ Hz typiquement.

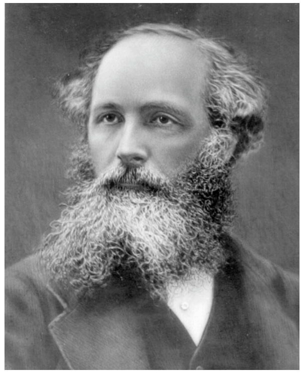
Conducteur parfait

Le conducteur parfait correspond à la limite $\gamma \to \infty$.

On a alors dans le conducteur $\boxed{\vec{j} = \vec{0}}$; $\boxed{\vec{E} = \vec{0}}$; $\boxed{\vec{B} = \vec{0}}$ et $\boxed{\rho = 0}$.

- ➤ Le modèle du conducteur parfait correspond à une **épaisseur de peau nulle** : $\delta(\omega) = 0$, $\forall \omega$. Le courant ne peut donc être que surfacique, de densité $\vec{j}_s$.
- ➤ Un conducteur parfait ne peut être chargé qu'en surface, avec une densité surfacique σ.

Mais qui étaient-ils ?



James Clerk Maxwell (1831-1879).
Physicien britannique d'origine écossaise. Nous lui devons une théorie profondément originale de l'électrodynamique, inspirée des travaux antérieurs de Faraday et de William Thomson. Il publia ses quatre équations unifiées de l'électromagnétisme en 1873. Ces équations, prédisant l'existence d'ondes électromagnétiques se propageant à la vitesse de la lumière, ont ouvert la voie à la relativité restreinte (Einstein) et à la mécanique quantique (Plank). Il fut aussi l'un des principaux fondateurs de la théorie cinétique des gaz et de la mécanique statistique. En tant que premier directeur du laboratoire Cavendish, il promut la physique expérimentale de précision à Cambridge. Son approche de la physique s'accompagnait d'une réflexion philosophique.
Les équations de Maxwell ont été reformulées sous la forme que nous connaissons par Heaviside en 1880.

John Henry Poynting (1852-1914).
Physicien britannique. Il travailla sous la direction de Maxwell au célèbre laboratoire Cavendish à Cambridge, à la fin des années 1870. Il étudia les ondes électromagnétiques, définissant le vecteur de Poynting, ainsi que le théorème de Poynting (bilan d'énergie électromagnétique) en 1884. Il montra en 1903 que, sous l'effet du rayonnement solaire, les petites particules pouvaient être attirées vers le soleil (effet Poynting-Robertson). Il fut, avec le prix Nobel J.J. Thomson, coauteur d'une série de livres de cours de physique qui eut un grand succès durant le premier tiers du XXe siècle.