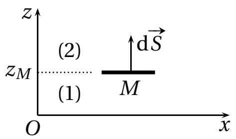
Mécanique des fluides

III — Dynamique des fluides newtoniens

Actions de contact dans un fluide newtonien

On considère un fluide réel, dans un écoulement unidimensionnel laminaire dont le champ des vitesses est de la forme $\vec{v}(M,t) = v(z,t)\,\vec{e}_x$.



Les actions de contact exercées par le fluide de la couche (2) sur le fluide de la couche (1) à travers la surface dS se décomposent en une composante normale et une composante tangentielle :

$$\mathrm{d}\vec{F}_{2\to1} = \mathrm{d}\vec{F}_{\mathrm{n},2\to1} + \mathrm{d}\vec{F}_{\mathrm{t},2\to1}\,.$$

La composante normale définit la pression $P(M,t)$:

$$\mathrm{d}\vec{F}_{\mathrm{n},2\to1} = -P(M,t)\,\mathrm{d}\vec{S}$$

La composante tangentielle est appelée **force de viscosité**, ou **force de cisaillement**. Dans le cas d'un **fluide newtonien**, elle s'écrit

$$\mathrm{d}\vec{F}_{\mathrm{t},2\to1} = \eta\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_{z_M}\mathrm{d}S\,\vec{e}_x$$

où $\eta > 0$ est le coefficient de **viscosité**, ou viscosité dynamique du fluide. Son unité est le **poiseuille** (symbole Pl).

- ➤ Le fluide de la couche (1) exerce sur le fluide de la couche (2) la force de viscosité opposée $\mathrm{d}\vec{F}_{\mathrm{t},1\to2} = -\mathrm{d}\vec{F}_{\mathrm{t},2\to1}$.
- ➤ Ordre de grandeurs : $\eta_{\text{air}} \approx 10^{-5}$ Pl ; $\eta_{\text{eau}} \approx 10^{-3}$ Pl ; $\eta_{\text{glycérine}} \approx 1$ Pl.
- ➤ Les expressions de $\mathrm{d}\vec{F}_{\mathrm{n},2\to1}$ et $\mathrm{d}\vec{F}_{\mathrm{t},2\to1}$ traduisent aussi la force exercée par le fluide sur une surface $\mathrm{d}\vec{S}$ de paroi.

On définit le coefficient de **viscosité cinématique** du fluide :

$$\nu = \frac{\eta}{\mu}$$

- ➤ La viscosité cinématique prend en compte la viscosité mais aussi l'inertie du fluide ; c'est elle qui décrit l'effet des forces visqueuses sur l'écoulement.
- ➤ En ordre de grandeur $\nu_{\text{air}} \approx 15\nu_{\text{eau}}$.

Caractère diffusif de la viscosité

L'effet des forces de viscosité est caractéristique d'un phénomène diffusif :
- la force de viscosité est nulle si le champ des vitesses est uniforme ;
- si le champ des vitesses n'est pas uniforme, les forces visqueuses tendent à le rendre uniforme : les particules de fluide accélèrent les particules de fluide voisines plus lentes et sont ralenties par les particule de fluides voisines plus rapides ;
- le transfert de quantité de mouvement se fait perpendiculairement aux lignes de courant de l'écoulement laminaire, sans transport macroscopique de matière dans cette direction.

Conditions aux limites

Sur un obstacle

Dans un fluide réel, la vitesse d'un fluide en un point de contact avec un obstacle est égale à la vitesse du point coïncidant sur l'obstacle.

- ➤ L'interface entre deux fluides réels non miscibles est traitées comme une paroi.

À une surface libre

À une surface libre entre un liquide et l'air, on néglige la force visqueuse exercée par l'air sur le fluide ; le gradient de vitesse normal à cette surface y est donc nul.

Équivalent volumique des actions de contact

Forces de pression (contrainte normale)

La densité volumique des forces de pression est

$$\vec{f}_{\mathrm{p}} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P$$

Forces de viscosité pour un écoulement incompressible (contrainte tangentielle)

La densité volumique des forces visqueuses est

$$\vec{f}_{\mathrm{v}} = \eta\Delta\vec{v}$$

- ➤ Pour un écoulement laminaire de la forme $\vec{v} = v(z,t)\,\vec{e}_x$, on obtient $\vec{f}_{\mathrm{v}} = \eta\dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}\,\vec{e}_x$.

Équation de Navier-Stokes

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à une particule de fluide conduit, dans un référentiel galiléen, à l'équation de Navier-Stokes :

$$\mu\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}})\,\vec{v}\right) = \mu\,\vec{g} - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P + \eta\Delta\vec{v}$$

Extrait du programme officiel : *La mémorisation de l'équation de Navier-Stokes n'est pas exigible…*

Écoulements particuliers

Donnés à titres indicatif. Extrait du programme officiel : *Aucune étude d'écoulements visqueux particuliers (Couette, Poiseuille…) ne figure au programme.*

Écoulement de Couette

On appelle écoulement de Couette l'écoulement laminaire entre deux parois en mouvement de translation relatif ; il s'agit d'un écoulement de cisaillement simple.
- Écoulement de Couette plan : écoulement entre deux plaques planes parallèles, en translation à la vitesse relative $\vec{V}_0$. Le profil de vitesse est linéaire.
- Écoulement de Couette cylindrique : écoulement laminaire entre deux cylindres concentriques, en rotation relative. Utilisé dans le viscosimètre de Couette, pour mesurer le coefficient de viscosité η d'un fluide.

Écoulement de Poiseuille

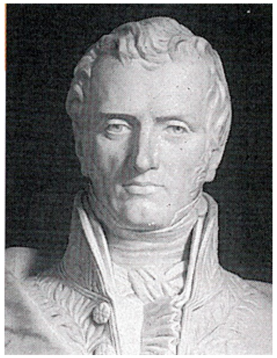
Il s'agit de l'écoulement laminaire dans une conduite de section S, sous l'effet d'un gradient de pression ΔP appliqué entre les deux extrémité de la conduite de longueur L.
Le profil des vitesses est parabolique.
Dans le cas d'une conduite cylindrique de diamètre d, le débit volumique D_v induit par le gradient de pression ΔP est donné par la loi de Hagen-Poiseuille

$$D_\mathrm{v} = \frac{\pi}{128\eta}\frac{\Delta P}{L}d^4\,.$$

- Cette loi n'est pas à connaître !
- On définit la résistance hydraulique R_h par analogie avec la loi d'Ohm : $\boxed{\Delta P = R_\mathrm{h} D_\mathrm{v}}$. On retrouve les règles d'associations usuelles : les résistances hydrauliques s'ajoutent pour des conduites en série (traversées par le même débit), les inverses des résistances hydrauliques s'ajoutent pour des conduites en parallèle (soumises à la même différence de pression).

Mais qui étaient-ils ?

Jean-Louis-Marie Poiseuille (1797-1869).
Physicien et médecin français, diplômé de l'École polytechnique. Il étudie le circulation du sang dans les vaisseaux, et publie la loi qui porte son nom en 1846, déterminant le profil de la vitesse dans l'écoulement.



Claude-Louis Navier (1785-1836).
Ingénieur français, spécialiste de mécanique. Reçu — mal classé ! — à l'École polytechnique, il intègre ensuite le corps des Ponts et chaussées. Ses travaux portent principalement sur l'élasticité et les canaux de navigation. Sa contribution la plus importante est l'équation de Navier-Stokes. En 1820, il a l'idée d'ajouter un terme à l'équation d'Euler pour prendre en compte la perte d'énergie dans un fluide réel. S'inspirant de l'équation de la chaleur $\frac{\partial T}{\partial t} - \nu\Delta T = 0$ établie par Fourier en 1822, Navier, suivi par Stokes, propose en 1845 de décrire un fluide visqueux par le modèle :

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}})\,\vec{u} - \nu\Delta\vec{u} = \vec{0}\,,\quad \mathrm{div}\,\vec{u} = 0\,.$$