Physique des ondes — **III — Ondes électromagnétiques dans le vide**

1. Équations de propagation des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$

Dans le vide ($\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$), les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\operatorname{div} \vec{B}(M,t) = 0 \qquad \operatorname{div} \vec{E}(M,t) = 0$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{B}(M,t) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(M,t)}{\partial t} \qquad \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{E}(M,t) = -\frac{\partial \vec{B}(M,t)}{\partial t}$$

Les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ obéissent à la même équation de d'Alembert :

$$\Delta \vec{E}(M,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}(M,t)}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \Delta \vec{B}(M,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}(M,t)}{\partial t^2} = \vec{0}$$

la célérité étant donnée par

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

- Les champs électrique et magnétique obéissent à deux équations de propagation découplées ; ils restent cependant couplés *via* les équations de Maxwell, et ne peuvent ainsi pas être indépendants dans une onde électromagnétique progressive.
- On a exactement $c = 299\,792\,458\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ par définition du mètre.
- La perméabilité magnétique du vide vaut exactement $\mu = 4\pi\cdot 10^{-7}\ \mathrm{H\cdot m^{-1}}$. La permittivité diélectrique du vide vaut $\varepsilon_0 \approx 8{,}85\cdot 10^{-12}\ \mathrm{F\cdot m^{-1}}$.

2. Structure des ondes planes progressives harmoniques

Une onde électromagnétique est dite **plane**, **progressive** et **harmonique** (OPPH) si chaque composante des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ est de la forme

$$\boxed{a_i(M,T) = a_{I0}\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\overrightarrow{OM} + \varphi_i)}$$

Le vecteur d'onde est donné par $\vec{k} = k\vec{u}$, où $\vec{u}$ est le vecteur unitaire dans la direction de propagation de l'onde.

- La linéarité des équations en jeu permet d'utiliser la notation complexe $\underline{a}_i(M,t) = \underline{a}_{i0}\, e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\overrightarrow{OM})}$. On retrouve $a_i(M,t) = \mathrm{Re}\left\{\underline{a}_i(M,t)\right\}$.

1) Équation de Maxwell en notation complexe

On utilise les équivalences $\dfrac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow \times i\omega$ et $\vec{\nabla} \leftrightarrow \times(-i\vec{k})$.

$$\vec{k}\cdot\underline{\vec{B}}(M,t) = 0 \qquad \vec{k}\cdot\underline{\vec{E}}(M,t) = 0$$

$$\vec{k}\wedge\underline{\vec{B}}(M,t) = -\frac{\omega}{c^2}\underline{\vec{E}}(M,t) \qquad \vec{k}\wedge\underline{\vec{E}}(M,t) = \omega\underline{\vec{B}}(M,t)$$

2) Structure de l'OPPH

Les champs varient sinusoïdalement dans le temps et dans l'espace, les pulsations temporelle ω et spatiale k étant liées par la **relation de dispersion** :

$$k = \frac{\omega}{c}.$$

La relation de structure de l'onde est

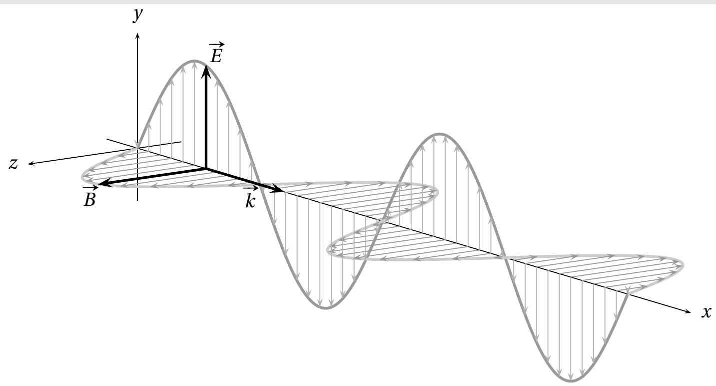
$$\vec{B}(M,t) = \frac{\vec{k}\wedge\vec{E}(M,t)}{\omega} = \frac{\vec{u}\wedge\vec{E}(M,t)}{c}$$

où $\vec{k} = k\vec{u}$. On en déduit les propriétés suivantes :

- Les champs $\vec{E}(M,t)$ et $\vec{B}(M,t)$ sont transverses : $\vec{k}\cdot\vec{E}(M,t) = 0$ et $\vec{k}\cdot\vec{B}(M,t) = 0$.
- Les champs $\vec{E}(M,t)$ et $\vec{B}(M,t)$ sont en phase.
- Les modules des champs $\vec{E}(M,t)$ et $\vec{B}(M,t)$ vérifient :

$$\|\vec{B}(M,t)\| = \frac{\|\vec{E}(M,t)\|}{c}.$$

- Les champs $\vec{E}(M,t)$ et $\vec{B}(M,t)$ sont perpendiculaires entre eux, et le trièdre $(\vec{k}, \vec{E}(M,t), \vec{B}(M,t))$ est direct.



3) Généralisation aux ondes planes progressives de forme quelconque

La relation de structure d'une onde plane progressive selon la direction de vecteur unitaire $\vec{u}$ s'écrit

$$\boxed{\vec{B}(M,t) = \frac{\vec{u}\wedge\vec{E}(M,t)}{c}}$$

- Les champs $\vec{E}(M,t)$ et $\vec{B}(M,t)$ sont transverses.
- Le trièdre $(\vec{u}, \vec{E}(M,t), \vec{B}(M,t))$ est direct.
- On a $\|\vec{B}(M,t)\| = \dfrac{\|\vec{E}(M,t)\|}{c}$.

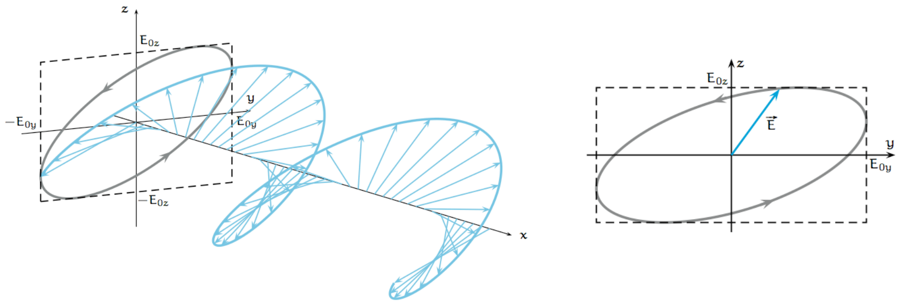
3. États de polarisation des OPPH

La direction du champ électrique d'une onde plane progressive harmonique dans le plan d'onde définit la direction de polarisation de cette onde.
L'évolution de cette direction au cours du temps en un point donné définit l'état de polarisation de l'onde.

On définit l'état de polarisation à partir de la courbe décrite au cours du temps par l'extrémité du champ $\vec{E}$, le vecteur $\vec{k}$ étant dirigé vers l'observateur.

Polarisation elliptique

Dans le cas le plus général, une onde plane progressive monochromatique est polarisée elliptiquement : l'extrémité du champ électrique décrit une ellipse.
Si l'ellipse est parcourue dans le sens trigonométrique, la polarisation de l'onde est dite **elliptique gauche** (cf. figure). Dans le cas contraire, elle est dite **elliptique droite**.



Polarisation rectiligne

Le champ $\vec{E}(M,t)$ garde une direction constante au cours du temps.

- Les deux composantes du champ $\vec{E}$ dans le plan de polarisation sont en phase ou en opposition de phase.

Polarisation circulaire

La polarisation est dite circulaire gauche ou circulaire droite si l'extrémité du $\vec{E}$ décrit un cercle dans le sens trigonométrique ou dans le sens horaire.

- Les deux composantes du champ $\vec{E}$ dans le plan de polarisation sont en quadrature.

États de base de polarisation

- Toute onde plane progressive monochromatique peut se décomposer en deux ondes polarisées rectilignement, de directions de polarisation perpendiculaires entre elles.
- Toute onde plane progressive monochromatique peut se décomposer en deux ondes polarisées circulairement, l'une droite et l'autre gauche.

4. Étude énergétique des OPPH

1) Densité volumique d'énergie électromagnétique

La densité volumique d'énergie électromagnétique d'une OPPH s'écrit

$$\boxed{w_{\mathrm{em}}(M,t) = \varepsilon_0 \vec{E}^2(M,t) = \frac{\vec{B}^2(M,t)}{\mu_0}}$$

- Il y a équi-répartition de l'énergie sous les formes électrique et magnétique.
- En moyenne temporelle : $\langle w_{\mathrm{em}}(M)\rangle = \dfrac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} = \dfrac{B_0^2}{2\mu_0}$ où E_0 et B_0 sont les amplitudes des champs $\vec{E}(M,t)$ et $\vec{B}(M,t)$.

2) Vecteur de Poynting

Le vecteur de Poynting associé à une OPPH se propageant selon $\vec{u}$ s'écrit

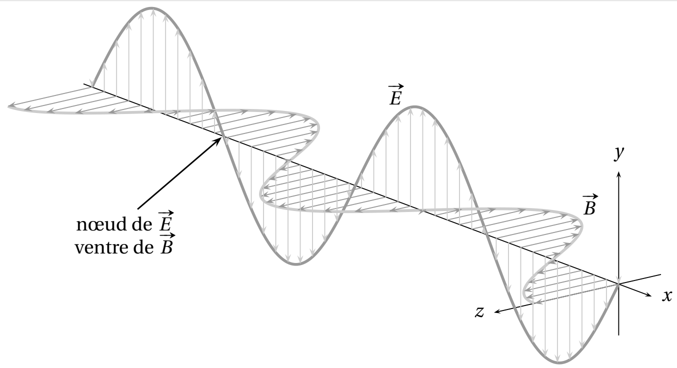
$$\boxed{\vec{\Pi}(M,t) = \mathrm{c}\varepsilon_0 \vec{E}^2(M,t)\vec{u} = \mathrm{c}\, w_{\mathrm{em}}(M,t)\vec{u}}$$

- L'énergie se propage dans le sens de propagation de l'onde, à la vitesse c, égale à la célérité de l'onde.

5. Réflexion sous incidence normale d'une OPPH sur un plan conducteur parfait

Dans un conducteur parfait : $\vec{E} = \vec{0}$, $\vec{B} = \vec{0}$, $\vec{j} = \vec{0}$ et $\rho = 0$. Les charges et les courants ne peuvent être que surfaciques.
Un conducteur parfait occupe le demi-espace $x > 0$; une OPPH polarisée rectilignement selon vey se propage dans le demi-espace $x < 0$ selon $\vec{e}_x$.
L'onde incidente $\vec{E}_{\mathrm{i}}(M,t) = E_{0\mathrm{i}}\cos(\omega t - kx)\vec{e}_y$ ne peut vérifier la condition de passage $\vec{E}(x=0,t) = \vec{0}$.
Il existe une onde réfléchie, se propageant selon $-\vec{e}_x$ dans le demi-espace $x < 0$.
La superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie conduit à une **onde stationnaire** :

$$\vec{E}(M,t) = 2E_{0\mathrm{i}}\sin(\omega t)\sin(kx)\vec{e}_y \qquad \vec{B}(M,t) = \frac{2E_{0\mathrm{i}}}{\mathrm{c}}\cos(\omega t)\cos(kx)\vec{e}_z$$



- Les champs électrique et magnétique sont en quadrature spatiale et temporelle.
- L'onde incidente donne naissance à des courants surfaciques sur la plan conducteur ; ces courants sont sources de l'onde réfléchie dans le demi-espace $x < 0$, et d'une onde qui s'oppose à l'onde incidente dans le demi-espace $x > 0$.