IV — Phénomènes linéaires de propagation dispersifs

Phénomène dispersif linéaires

Ondes planes pseudo-progressives harmoniques

La solution d'un phénomène linéaire — dont l'équation d'onde est une équation aux dérivées partielles linéaire — de propagation unidimensionnel selon Ox peut être cherchée sous la forme d'une onde plane pseudo-progressive harmonique :

$$\underline{y}(x,t) = Y_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\omega t - \underline{k}(\omega)x + \varphi]} = \underline{Y}_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\omega t - \underline{k}(\omega)x]} \qquad (1)$$

avec $\underline{Y}_0 = Y_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$.

- La linéarité de l'équation d'onde permet, grâce à l'analyse de Fourier, de décomposer toute solution en somme (discrète ou continue) de fonctions harmoniques du temps.
- La dépendance spatiale n'est *a priori*ăpas harmonique, le nombre d'onde $\underline{k}$ étant complexe.
- L'écriture générale d'une onde plane pseudo-progressive harmonique selon la direction repérée par le vecteur unitaire $\vec{u}$ est
$$\underline{y}(x,t) = \underline{Y}_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\omega t - \underline{\vec{k}}(\omega)\cdot\overrightarrow{OM}]} \quad \text{avec} \quad \underline{\vec{k}} = \underline{k}\,\vec{u}.$$

Relation de dispersion

La relation entre le nombre d'onde $\underline{k}$ et la pulsation temporelle ω est la relation de dispersion. On l'écrit en séparant les parties réelle et imaginaire selon

$$\underline{k}(\omega) = k'(\omega) + \mathrm{i}k''(\omega).$$

L'onde pseudo-progressive (1) *réelle* s'écrit alors

$$y(x,t) = Y_0\,\mathrm{e}^{k''(\omega)x}\cos\left[\omega t - k'(\omega)x + \varphi\right]. \qquad (2)$$

Vitesse de phase — phénomène dispersif

La phase instantanée de l'onde (2) décrit une propagation caractérisée par la célérité, appelée **vitesse de phase** :

$$v_\varphi(\omega) = \frac{\omega}{k'(\omega)}$$

Si la vitesse de phase dépend de la pulsation ω, le phénomène est dit **dispersif**.

Absorption

La partie imaginaire du nombre d'onde traduit la variation de l'amplitude de l'onde au cours de sa propagation.

$k'' < 0$ **:** la propagation s'accompagne d'un amortissement de l'onde ;

$k'' > 0$ **:** la propagation s'accompagne d'une amplification de l'onde.

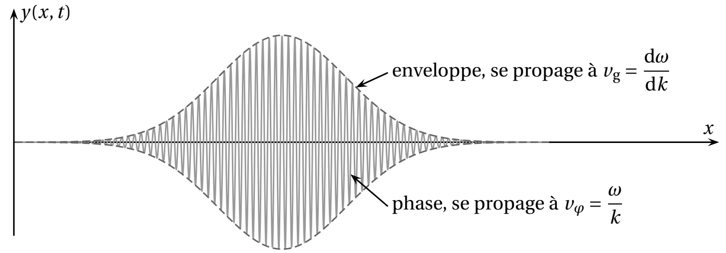
- L'amortissement peut être dû à un phénomène d'absorption (dissipatif), ou à la géométrie particulière du milieu de propagation.
- La croissance ou la décroissance exponentielle de l'amplitude de l'onde se fait sur une distance caractéristique $\delta(\omega) = \frac{1}{|k''(\omega)|}$ qui dépend *a priori* de la pulsation de l'onde.
- Dans le cas où $k' = 0$ et $k'' < 0$, on a $y(x,y) = Y_0\,\mathrm{e}^{k''x}\cos(\omega t)$; cette onde stationnaire dont l'amplitude décroît avec x est appelée **onde evanescence**.

Paquet d'ondes

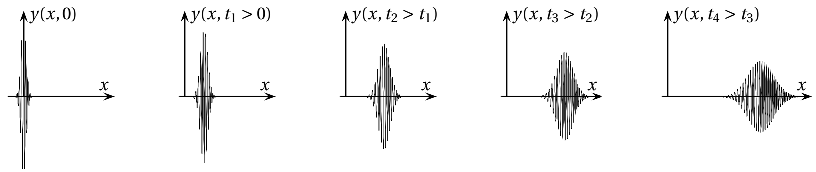
Un paquet d'onde est constitué d'une onde de pulsation moyenne ω_0, modulé par une enveloppe de longueur finie contenant un grand nombre de périodes $T_0 = 2\pi/\omega_0$.
Dans le cas de la propagation sans absorption ($k'' = 0$) d'un paquet d'onde dans un milieu faiblement dispersif, les nombres d'ondes sont alors dans un intervalle restreint autour de $k_0 = k(\omega_0)$, et l'onde est de la forme

$$y(x,t) = F\left(t - \frac{x}{v_\mathrm{g}}\right)\cos\left[\omega_0\left(t - \frac{x}{v_\varphi}\right)\right] \qquad \text{avec} \qquad v_\mathrm{g} = \left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\right)_{k_0} \quad \text{et} \quad v_\varphi = \frac{\omega_0}{k_0}$$

- L'enveloppe $F(t - x/v_\mathrm{g})$ se propage avec la **vitesse de groupe** v_g ; la phase se propage avec la vitesse de phase v_φ.
- Dans le cas où la propagation est dispersive, on a $v_\varphi \neq v_\mathrm{g}$.



- Dans le cas d'un phénomène faiblement dispersif, l'enveloppe se propage sans se déformer.
- Si la dispersion est plus importante, l'enveloppe se déforme au cours de la propagation. On observe un étalement du paquet d'ondes au cours de la propagation :



Propagation d'une onde électromagnétique transverse dans un plasma

Un plasma est un gaz partiellement ou totalement ionisé, constitué de cations et d'électrons.
On considère un plasma dilué, constitué de cations de masse M, de charge $+\mathrm{e}$ à la densité volumique n_c, et d'électrons de masse m, de charge $-\mathrm{e}$ à la densité volumique n_e.
Hypothèses :

- on néglige les interactions entres les particules ; elles ne sont soumises qu'au champ électromagnétique de l'onde ;
- comme $M \gg m$, les ions sont considérés comme au repos ;
- en l'absence d'onde, le plasma est localement neutre : les cations et les électrons ont la même densité volumique n_0.
- le plasma est soumis à une onde électromagnétique plane pseudo-progressive harmonique **transverse**.

On établit les résultats suivants :

- le plasma reste localement neutre ; la densité volumique des électrons vaut donc n_0 ;
- la plasma peut être caractérisé par une conductivité électrique complexe :
$$\underline{\vec{j}} = \underline{\gamma}\,\underline{\vec{E}} \quad \text{avec} \quad \underline{\gamma} = -\mathrm{i}\frac{n_0\mathrm{e}^2}{m\omega};$$
- les champs $\vec{j}$ et $\vec{E}$ sont en quadrature temporelle ; en particulier, la puissance moyenne cédée par le champ au plasma est nulle ($\langle\vec{j}\cdot\vec{E}\rangle = 0$) ;

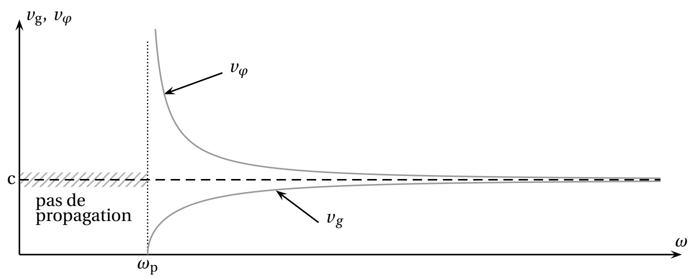
- ➤ les équations de Maxwell conduisent à la relation de dispersion

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega - \omega_\mathrm{p}^2}{\mathrm{c}^2} \quad \text{ou} \quad \omega_\mathrm{p} = \sqrt{\frac{n_0 \mathrm{e}^2}{m\varepsilon_0}} \text{ est la } \textbf{pulsations plasma}$$

- ➤ l'onde ne peut se propager que si $\omega > \omega_\mathrm{p}$; comme $\underline{k}$ est alors réel, le phénomène est dispersif, sans absorption, et caractérisé par les vitesse de phase et de groupe

$$v_\varphi = \frac{\mathrm{c}}{\sqrt{1 - \dfrac{\omega_\mathrm{p}^2}{\omega^2}}} \quad \text{et} \quad v_\mathrm{g} = \mathrm{c}\sqrt{1 - \frac{\omega_\mathrm{p}^2}{\omega^2}}.$$

- ➤ si $\omega < \omega_\mathrm{p}$, le nombre d'onde est imaginaire pur ; on observe alors une onde évanescente. L'onde qui arrive alors sur le plasma est réfléchie.



Réflexion et réfraction d'une onde plane progressive harmonique à l'interface de deux milieux transparents

Indice complexe

On définit l'indice complexe $\underline{n}$ d'un milieu par :

$$\underline{k} = \underline{n}\frac{\omega}{c}.$$

- ➤ Dans le vide, le nombre d'onde d'une onde plane est donné par la relation de dispersion $k_0 = \dfrac{\omega}{c}$. On peut donc écrire $\underline{k} = \underline{n}k_0$.
- ➤ On peut décomposer l'indice complexe sous la forme $\underline{n} = n' + \mathrm{i}n''$.

L'**indice de dispersion** d'un milieu est la partie réelle de son indice complexe :

$$n' = k'\frac{c}{\omega}.$$

- ➤ Si l'indice de dispersion dépend de la pulsation, le milieu est dit dispersif.

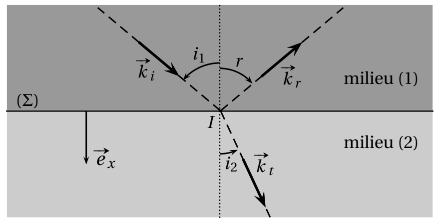
L'**indice d'absorption** d'un milieu est la partie imaginaire de son indice complexe :

$$n'' = k''\frac{c}{\omega}.$$

Si $n'' = 0$, le milieu est dit transparent.

Lois de Descartes

On considère deux milieux transparents, d'indices n_1 et n_2 réels, séparés par le plan $x = 0$. La surface de séparation (Σ) est appelée dioptre. Le milieu (1) occupe le demi-espace $x < 0$, le milieu (2) le demi-espace $x > 0$.



Une onde plane progressive harmonique incidente se propage dans le milieu (1) selon la direction $\vec{u}_\mathrm{i}$ et rencontre le dioptre. Elle donne alors naissance à une onde plane progressive harmonique se propageant dans le milieu (2) selon la direction $\vec{u}_\mathrm{t}$, appelée onde transmise, et à une onde se propageant dans le milieu (1) selon la direction $\vec{u}_\mathrm{r}$, appelée onde réfléchie. Les nombres d'onde s'écrivent

$$\vec{k}_\mathrm{i} = n_1\frac{\omega}{\mathrm{c}}\vec{u}_\mathrm{i}\,; \quad \vec{k}_\mathrm{r} = n_1\frac{\omega}{\mathrm{c}}\vec{u}_\mathrm{r}\,; \quad \vec{k}_\mathrm{t} = n_2\frac{\omega}{\mathrm{c}}\vec{u}_\mathrm{t}$$

Les champs magnétiques incident, réfléchi et transmis sont donnés par les relations de structure :

$$\vec{B}_\mathrm{i} = \frac{n_1}{\mathrm{c}}\vec{u}_\mathrm{i}\wedge\vec{E}_\mathrm{i}\,; \quad \vec{B}_\mathrm{r} = \frac{n_1}{\mathrm{c}}\vec{u}_\mathrm{r}\wedge\vec{E}_\mathrm{r}\,; \quad \vec{B}_\mathrm{t} = \frac{n_2}{\mathrm{c}}\vec{u}_\mathrm{t}\wedge\vec{E}_\mathrm{t}$$

À l'interface des deux milieux, il y a continuité du champ magnétique et de la composante tangentielle du champ électrique

On en déduit les lois de Descartes de l'optique géométrique :

$$\boxed{r = -i_1} \quad \text{et} \quad \boxed{n_2 \sin i_2 = n_1 \sin i_1}.$$

- ➤ Les lois de Descartes ne donnent aucune information sur l'amplitude et sur l'état de polarisation des ondes réfléchie et transmise.

Coefficients de réflexion et de transmission en amplitude sous incidence normale

Dans le cas où $i_1 = 0$, on a $r = 0$ et $i_2 = 0$. Les champs électrique et magnétique sont continus à l'interface des deux milieux. On en déduit les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude pour le champ électrique :

$$\boxed{r_{1\to2} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}} \quad \text{et} \quad \boxed{t_{1\to2} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}}$$

- ➤ Les coefficients en amplitude sont réels.
- ➤ L'onde transmise est toujours en phase avec l'onde incidente ($t_{1\to2} > 0$).
- ➤ L'onde réfléchie est
  - en phase avec l'onde incidente si $n_1 < n_2$;
  - en opposition de phase si $n_1 > n_1 2$. C'est le cas de la **réflexion vitreuse** (de l'air sur le verre).
- ➤ Si $n_1 = n_2$, il n'y a pas d'onde réfléchie.

Coefficients de réflexion et de transmission en puissance sous incidence normale

Les vecteurs de Poynting moyens des ondes incidente, réfléchie et transmise s'écrivent

$$\langle\vec{\Pi}_\mathrm{i}\rangle = \frac{n_1}{2\mu_0\mathrm{c}}E_{0\mathrm{i}}^2\vec{u}_\mathrm{i}\,; \quad \langle\vec{\Pi}_\mathrm{r}\rangle = \frac{n_1}{2\mu_0\mathrm{c}}E_{0\mathrm{r}}^2\vec{u}_\mathrm{r}\,; \quad \langle\vec{\Pi}_\mathrm{t}\rangle = \frac{n_2}{2\mu_0\mathrm{c}}E_{0\mathrm{t}}^2\vec{u}_\mathrm{t}$$

Les coefficients $R_{1\to2} = \|\langle\vec{\Pi}_\mathrm{r}\rangle\| / \|\langle\vec{\Pi}_\mathrm{i}\rangle\|$ et $T_{1\to2} = \|\langle\vec{\Pi}_\mathrm{t}\rangle\| / \|\langle\vec{\Pi}_\mathrm{i}\rangle\|$ s'écrivent

$$\boxed{R = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2} \quad \text{et} \quad \boxed{T = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}}$$

- ➤ On a $R_{1\to2} = R_{2\to1} = R$ et $T_{1\to2} = T_{2\to1} = T$: ces coefficients ont même valeur quel que soit le sens de traversée de l'interface.
- ➤ La relation $\boxed{R + T = 1}$ traduit la conservation de l'énergie.