Thermodynamique

II — Statique des fluides

Description d'un fluide

Un fluide est un milieu matériel continu dont les déformations peuvent prendre des valeurs aussi grandes que l'on veut : il peut se mettre sous une forme quelconque lorsqu'il est soumis à un système de forces, ces forces pouvant être aussi faibles que l'on veut, à condition qu'on les fasse agir pendant un temps assez long.
Les deux états fluides sont :

L'état gazeux : peu dense, compressible, le fluide occupe tout l'espace disponible.

L'état liquide : dense, quasi incompressible, le fluide occupe un volume limité par les parois du récipient et par une **surface libre**.

On distingue trois échelles de longueur dans la description d'un fluide :
- **L'échelle microscopique** définie au niveau moléculaire ; elle correspond au libre parcours moyen ℓ caractérisant le mouvement des molécules du fluides, typiquement $\ell \approx 100$ nm pour un gaz et $\ell \approx 10^{-10}$ m pour un liquide.
- **L'échelle macroscopique** L, caractéristique de l'écoulement (largeur d'un canal, diamètre d'un tuyau, taille d'un obstacle).
- **L'échelle mésoscopique** a, intermédiaire entre les deux échelles précédentes : $\boxed{\ell \ll a \ll L}$. Un volume de fluide de dimension mésoscopique a^3 est suffisamment petit à l'échelle macroscopique pour être considéré comme ponctuel, et suffisamment grand à l'échelle microscopique pour contenir un grand nombre de molécules.

L'échelle mésoscopique permet de définir des grandeurs locales, définies statistiquement sur le grand nombre de molécules du volume a^3 situé au point considéré.

Une **particule de fluide** est un système **fermé**, de volume mésoscopique $d\tau = a^3$. Elle permet de définir statistiquement des grandeurs locales intensives (température, pression, masse volumique, vitesse).

- ➤ Le modèle de la particule de fluide n'est pas toujours utilisable : il faut que $\ell \ll L$. Dans le cas d'un gaz à très basse pression, ou d'un système d'échelle L très petite, on peut avoir $\ell \approx L$, ce qui rend impossible la description à l'échelle mésoscopique.
- ➤ L'échelle mésoscopique permet de décrire le fluide comme un **milieu continu**.
- ➤ Le mouvement du fluide est décrit par $\vec{v}(M,t)$, moyenne des vecteurs-vitesse des molécules contenues dans la particule de fluide située en M.

La statique des fluides est l'étude des fluides au repos : $\vec{v}(M) = \vec{0}$, $\forall M$.

- ➤ Nous nous limiterons à la statique des fluides en référentiel galiléen.

Pression dans un fluide au repos

On considère une surface élémentaire $d\vec{S}$ située en M, séparant une portion de fluide du milieu extérieur, orientée vers le milieu extérieur. Le fluide exerce sur cet élément de surface la force

$$\boxed{d\vec{F} = P(M)\, d\vec{S}}$$

où le scalaire positif $P(M)$ définit la pression du fluide en M.

- ➤ L'unité SI de la pression est le pascal (symbole Pa). On utilise aussi le bar : 1 bar = 10^5 Pa.
- ➤ L'élément de surface peut délimiter une surface matérielle (une paroi), ou délimiter une surface « par la pensée » au sein du fluide.

À l'interface entre deux fluides, la pression est continue.

Équation fondamentale de la statique des fluides

On considère un fluide de masse volumique ρ, placé dans le seul champ de pesanteur $\vec{g} = -g\,\vec{e}_z$, la verticale ascendante étant repérée par $\vec{e}_z$.
Quand le fluide est au repos, le champ de pression vérifie l'équation fondamentale de la statique des fluides :

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g$$

- ➤ C'est une équation *locale*, vérifiée en chaque point du fluide.

Cas d'un liquide incompressible (hydrostatique)

Un liquide est considéré comme homogène et incompressible : $\rho(M) = \rho_0$, $\forall M$. L'intégration de la relation de la statique des fluides conduit à la **loi de l'hydrostatique** :

$$\boxed{P(z) = P_0 - \rho g (z - z_0)}$$

où l'on note $P_0 = P(z_0)$.

- ➤ Dans l'eau ($\rho = 1\,000\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$), une variation d'altitude de 10 m entraîne une variation de pression de 1 bar = 10^5 Pa.
- ➤ L'axe des z est orienté vers le haut.

Cas d'un gaz parfait : modèle de l'atmosphère isotherme

La masse volumique est reliée à la pression selon l'équation d'état du gaz parfait $P = \dfrac{\rho RT}{M}$ où M est la masse molaire du gaz ($M = 29\ \mathrm{g \cdot mol^{-1}}$ pour l'air).
La relation de la statique des fluides s'écrit alors $\dfrac{dP}{P} = -\dfrac{Mg}{RT}\, dz$.
Il faut faire une hypothèse sur la loi de variation $T(z)$ pour intégrer cette relation. Dans le cas de l'atmosphère **isotherme** : $T = T_0$. On en déduit

$$P(z) = P_0\, e^{-\frac{Mgz}{RT_0}} = P_0\, e^{-\frac{z}{H}}$$

où $P_0 = P(z = 0)$ et $H = \frac{RT_0}{Mg}$.
La pression atmosphérique varie avec une hauteur caractéristique $H = \frac{RT_0}{Mg} \approx 8\,600$ km à 20 °C. Elle varie donc de moins de 1 % sur une hauteur de 86 m.

La pression dans un gaz est en général considérée comme uniforme en thermodynamique.

- ➤ On ne parle alors plus de la pression en un point du gaz, mais de « la pression du gaz ».
- ➤ La variation de la pression avec z n'est prise en compte que dans les problèmes atmosphériques « en altitude ».

Facteur de Boltzmann

La masse volumique de l'atmosphère isotherme est donnée par

$$\rho(z) = \rho_0\,\mathrm{e}^{-\frac{Mgz}{RT_0}} = \rho_0\,\mathrm{e}^{-\frac{mgz}{k_\mathrm{B}T_0}}$$

où m est la masse d'une molécule. La probabilité de trouver une molécule de gaz à l'altitude z est proportionnelle à $\rho(z)$, donc au terme $\mathrm{e}^{-\frac{mgz}{k_\mathrm{B}T_0}}$.

- Le numérateur représente l'énergie potentielle de pesanteur d'une molécule : $E_\mathrm{p} = mgz$.
- Le dénominateur $k_\mathrm{B}T_0$ représente l'énergie d'agitation thermique.
- Le rapport de ces deux termes reflète leur *compétition* :
  - la pesanteur tend à amener toutes les molécules au niveau du sol $z = 0$;
  - l'agitation thermique tend à uniformiser la répartition des molécules.

Ce résultat se généralise à tout système isotherme en équilibre :

Étant donné un système en équilibre à la température uniforme T, la probabilité pour une particule d'avoir l'énergie E_i est proportionnelle au **facteur de Boltzmann** :

$$\exp\left(-\frac{E_i}{k_\mathrm{B}T}\right)$$

Poussée d'Archimède

La résultante des forces de pression exercées par un fluide sur un corps immergé est appelée **poussée d'Archimède** $\vec{\Pi}_\mathrm{A}$.
La poussée d'Archimède est égale à l'opposé du poids du fluide déplacé (remplacé par le corps immergé) :

$$\vec{\Pi}_\mathrm{A} = -M_\text{fluide}\,\vec{g} = -\rho_0 V\vec{g}$$

où V est le volume de fluide déplacé, de masse volumique ρ_0.
La poussée d'Archimède s'applique au centre de masse du fluide déplacé, appelé **centre de poussée** C.

- Le théorème d'Archimède s'applique pour les corps immergés dans un système de deux fluides différents en équilibre, en particulier dans le cas des corps flottants dans un liquide (corps partiellement immergé). Dans ce dernier cas, la poussée d'Archimède passe par le centre de poussée C (mais qui n'est pas son point d'application).
- Le fluide déplacé doit être en équilibre pour que l'on puisse appliquer le théorème d'Archimède.
- On appelle **poids apparent** le terme $m\vec{g} + \vec{\Pi}_\mathrm{A}$. Un corps flotte si son poids apparent est dirigé vers le haut.